

## CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

### Programma voortentamen Wiskunde B

Ingaande december 2018

Het voortentamen wiskunde B wordt afgenomen als een schriftelijk tentamen met open vragen. De tentamentijd is 3 uur. Informatie over de tentamendata en over de inschrijving voor deze tentamens vindt u op [www.ccvx.nl](http://www.ccvx.nl).

Het programma van het voortentamen wiskunde B van de CCVW is gebaseerd op het eindexamenprogramma wiskunde B van het vwo voor 2019 zoals gepubliceerd op [www.examenblad.nl](http://www.examenblad.nl). **Belangrijk verschil is dat er bij het tentamen geen gebruik gemaakt mag worden van een grafische rekenmachine** of overige ICT. De nadere vaststelling van het examenprogramma op [www.examenblad.nl](http://www.examenblad.nl) is daarom niet van toepassing.

In dit document vindt u

- Het tentamenprogramma
- De formulelijst die op het tentamen wordt afgedrukt
- Tentamenbenodigdheden
- Uitwerking van het tentamenprogramma in een lijst van begrippen, eigenschappen en vaardigheden
- Overzicht van algebraïsche vaardigheden
- Aanbevolen leermateriaal

Bij het voortentamen dienen alle berekeningen algebraïsch of exact uitgevoerd te worden, het gebruik van een **grafische rekenmachine** of een rekenmachine met de mogelijkheid om integralen te berekenen is daarom **niet toegestaan**.

Wel toegestaan is het gebruik van een standaard rekenmachine met exponentiële, logaritmische en goniometrische functies van een type vergelijkbaar met de Casio fx 82 serie en de TI 30 serie

## Tentamenprogramma wiskunde B

- 1 De kandidaat kan probleemsituaties die zich daartoe lenen in wiskundige termen analyseren, oplossen en het resultaat naar de betrokken context terugvertalen.
- 2 De kandidaat beheerst de bij het examenprogramma passende wiskundige vaardigheden, waaronder modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren, en logisch redeneren en bewijzen.
- 3 De kandidaat kan formules interpreteren en bewerken, bij een verband tussen twee variabelen een grafiek tekenen in een assenstelsel en bepalen of een gegeven formule herschreven kan worden als functievoorschrift.
- 4 De kandidaat kan grafieken tekenen en herkennen van de volgende standaardfuncties: machtsfuncties met rationale exponenten, exponentiële functies, logaritmische functies, goniometrische functies en de absolute-waarde-functie en kan van deze verschillende typen functies de karakteristieke eigenschappen benoemen en gebruiken.
- 5 De kandidaat kan functievoorschriften opstellen, bewerken, combineren, de bijbehorende grafieken tekenen en aan de hand van een functievoorschrift kwalitatieve uitspraken doen over de functie en haar grafiek.
- 6 De kandidaat kan de inverse van een functie begripsmatig hanteren, opstellen en gebruiken.
- 7 De kandidaat kan vergelijkingen, ongelijkheden en stelsels van twee lineaire vergelijkingen oplossen en de oplossingen interpreteren.
- 8 De kandidaat kan het asymptotisch gedrag van functies bepalen en dit met limietberekening aantonen.
- 9 De kandidaat kan de eerste en tweede afgeleide van een functie begripsmatig interpreteren en gebruiken om die functie te onderzoeken en de eerste en tweede afgeleide gebruiken in toepassingen.
- 10 De kandidaat kan de eerste en tweede afgeleide van functies bepalen met behulp van de regels voor het differentiëren en daarbij algebraïsche technieken gebruiken.
- 11 De kandidaat kan de onder 4 genoemde standaardfuncties en eenvoudige combinaties daarvan primitiveren (directe integratie) en kan in geschikte toepassingen een bepaalde integraal opstellen en exact berekenen.
- 12 De kandidaat kan bij periodieke verschijnselen formules opstellen en bewerken, de bijbehorende grafieken tekenen, vergelijkingen oplossen en hierbij de periodiciteit met inzicht gebruiken, waar nodig met gebruik van de formulelijst.
- 13 De kandidaat kan meetkundige eigenschappen van objecten onderzoeken en bewijzen en kan daarbij gebruik maken van meetkundige en algebraïsche technieken.
- 14 De kandidaat kan eigenschappen en onderlinge ligging van punten, lijnen, cirkels en andere geschikte figuren onderzoeken met behulp van algebraïsche voorstellingen, kan in een gegeven of zelfgekozen coördinatenstelsel algebraïsche voorstellingen van figuren opstellen en kan algebraïsche voorstellingen gebruiken om meetkundige problemen op te lossen.
- 15 De kandidaat kan met behulp van vectoren en inproducten eigenschappen van figuren in het vlak afleiden en berekeningen uitvoeren.
- 16 De kandidaat kan de aangegeven technieken toepassen in geschikte natuurwetenschappelijke en technische situaties.

## Formulelijst

Onderstaande lijst wordt afgedrukt op de laatste bladzijde van het voortentamen Wiskunde B

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin(t + u) = \sin t \cos u + \cos t \sin u$$

$$\sin(t - u) = \sin t \cos u - \cos t \sin u$$

$$\cos(t + u) = \cos t \cos u - \sin t \sin u$$

$$\cos(t - u) = \cos t \cos u + \sin t \sin u$$

$$\sin(2t) = 2 \sin(t) \cos(t)$$

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2 \cos^2(t) - 1 = 1 - 2 \sin^2(t)$$

## Tentamenbenodigdheden

Naar het tentamen moet u meenemen:

- Identiteitsbewijs  
*Paspoort, rijbewijs, Europese ID kaart, verblijfsdocument*
- Schrijfgerei: pen  
*Een potlood mag alleen gebruikt worden voor het tekenen van grafieken.*
- Liniaal of geodriehoek
- Rekenmachine met exponentiële, logaritmische en goniometrische functies  
**Grafische rekenmachines** en rekenmachines met de mogelijkheid om integralen te berekenen zijn **niet toegestaan**.
- Een horloge (geen smartwatch) of een klok (niet de klok van uw telefoon)
- Eten en drinken

Zorg ervoor dat u de juiste rekenmachine meeneemt. Als u alleen een grafische rekenmachine bij u heeft, dan zult u het tentamen zonder rekenmachine moeten maken.

## Uitwerking van het tentamenprogramma

Hieronder wordt het tentamenprogramma nader uitgewerkt in een lijst van begrippen, eigenschappen en vaardigheden. Deze lijst is bedoeld als ondersteuning bij de voorbereiding op het voortentamen, maar niet als vervanging van het tentamenprogramma. Hoewel deze lijst met de grootst mogelijke zorg is samengesteld, kan het daarom voorkomen dat een tentamenvraag die wel onder het tentamenprogramma valt, niet aan de orde komt in deze lijst.

Begrip / Eigenschap / Vaardigheid	Opmerking / Toelichting
<p><b>Standaardfuncties</b></p> <p>Machtsfuncties: <math>f(x) = x^n</math></p> <p>Exponentiële functies: <math>f(x) = a^x</math></p> <p>Logaritmische functies: <math>f(x) = {}^g\log(x)</math></p> <p>Het getal e en de natuurlijke logaritme</p> <p>Goniometrische functies:  <math>f(x) = \sin(x)</math>; <math>g(x) = \cos(x)</math></p> <p>Absolute-waarde-functie: <math>f(x) =  x </math></p>	<p><math>n</math> is een rationaal getal (een breuk)</p> <p><math>a &gt; 0</math></p> <p><math>g &gt; 0</math>; <math>g \neq 1</math>; <math>x &gt; 0</math></p> <p><math>e \approx 2,718282</math>; <math>{}^e\log(x) = \ln(x)</math></p> $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ <p><math> x  = x</math> voor <math>x \geq 0</math>  <math> x  = -x</math> voor <math>x &lt; 0</math></p>
<p><b>Functies combineren</b></p> <p>Functies kun je bij elkaar optellen en vermenigvuldigen met een constante</p> <p>Vermenigvuldigen en delen van functies</p>	<p><math>f(x) = 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1</math> is een combinatie van 5 machtsfuncties</p> <p>Bijvoorbeeld <math>h(x) = x^2 \cdot e^x</math></p>
<p><b>Samengestelde functies</b></p> <p><math>h(x) = f(g(x))</math></p>	<p><math>f(x) = e^x</math> en <math>g(x) = x^2</math>  geeft <math>h(x) = e^{x^2}</math></p>
<p><b>Inverse functies</b></p> <p><math>y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{inv}(y)</math></p>	<p><math>f(x) = x^3</math> geeft <math>f^{inv}(y) = \sqrt[3]{y}</math></p> <p><math>f(x) = g^x</math> geeft <math>f^{inv}(y) = {}^g\log(y)</math></p>

<p><b>Domein en Bereik</b></p> <p>Domein: alle toegestane x-waarden</p> <p>Bereik: alle mogelijke y-waarden</p> <p>Domein en bereik worden vaak gegeven in de intervalnotatie</p>	<p><math>f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}</math> bestaat niet als <math>x = 0</math></p> <p><math>f(x) = x^2</math> geeft <math>y = x^2 \geq 0</math></p> <p>Deze moet je kunnen lezen, maar hoeft je niet zelf te gebruiken</p>
---	---

<p><b>Machten</b></p> <p><math>a^n</math> is een macht met grondtal <math>a</math> en exponent <math>n</math></p>	<p><math>n</math> is een rationaal getal (een breuk)</p>
<p><b>Bijzondere exponenten</b></p> <p><math>a^2 = a \cdot a</math>; <math>a^3 = a \cdot a \cdot a</math> etc.</p> <p><math>a^1 = a</math></p> <p><math>a^0 = 1</math></p> <p><math>a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n</math></p> <p><math>a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}</math></p>	<p><math>a \neq 0</math></p> <p><math>a \neq 0</math></p> <p><math>a^{-1} = \frac{1}{a^1} = \frac{1}{a}</math></p> <p><math>n = 2, 3, 4, 5, \dots</math></p> <p><math>a \geq 0</math> voor even waarden van <math>n</math></p> <p><math>a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}</math></p>
<p><b>Rekenregels voor machten</b></p> <p><math>a^m \cdot a^n = a^{m+n}</math></p> <p><math>\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}</math></p> <p><math>(a^m)^n = a^{m \cdot n}</math></p> <p><math>(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n</math></p> <p><math>\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}</math></p>	<p><math>a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{1}{n} \cdot m} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m</math></p> <p><math>(a + b)^2 \neq a^2 + b^2</math></p>

<p><b>Machtsfuncties</b></p> <p>Standaardfunctie: <math>f(x) = x^n</math></p> <p>Constante functie: <math>f(x) = c</math></p> <p>Eerstegraads functies:  <math>f(x) = ax + b</math></p> <p>Tweedegraads functies:  <math>f(x) = ax^2 + bx + c</math></p> <p>Wortelfuncties:</p> <p>Voor <math>x \geq 0</math> is <math>f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}</math> de  inverse functie van <math>f(x) = x^2</math></p> <p><math>f(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}</math> is de inverse functie  van <math>f(x) = x^3</math></p>	<p>De invoervariabele <math>x</math> is het grondtal</p> <p><math>f(x) = c \cdot x^0</math></p> <p>De grafiek is een horizontale rechte lijn</p> <p><math>f(x) = a \cdot x^1 + b \cdot x^0</math></p> <p>De grafiek is de rechte lijn met  vergelijking <math>y = ax + b</math></p> <p>De grafiek is een parabool met  symmetrieas <math>x = -\frac{b}{2a}</math></p> <p>Dalparabool als <math>a &gt; 0</math></p> <p>Bergparabool als <math>a &lt; 0</math></p> <p>Het aantal snijpunten met de <math>x</math>-as  wordt bepaald door <math>D = b^2 - 4ac</math></p> <p>Domein: <math>x \geq 0</math>; Bereik <math>y \geq 0</math></p> <p>De grafiek is een halve (liggende)  parabool</p> <p>Domein: <math>\mathbb{R}</math>; Bereik <math>\mathbb{R}</math></p>
---	---

<p><b>Exponentiële functies</b></p> <p><math>f(x) = a^x</math> met <math>a &gt; 0</math></p> <p>Formule voor exponentiële groei met  beginwaarde <math>b</math> en groeifactor <math>g</math></p> <p>Verdubbelingstijd, halveringstijd</p>	<p>De invoervariabele <math>x</math> is de exponent</p> <p>Als <math>a &gt; 1</math> is de grafiek toenemend  stijgend met een horizontale asymptoot  voor <math>x \rightarrow -\infty</math></p> <p>Als <math>0 &lt; a &lt; 1</math> is de grafiek afnemend  dalend met een horizontale asymptoot  voor <math>x \rightarrow \infty</math></p> <p><math>N(t) = b \cdot g^t</math></p>
--	---

<p><b>Logaritmische functies</b></p> <p><math>l(x) = {}^g\log(x)</math> is de inverse functie van <math>f(x) = g^x</math></p> <p><math>{}^g\log(1) = 0; {}^g\log(g) = 1</math></p> <p><math>\log(x) = {}^{10}\log(x)</math></p> <p>Domein: <math>x &gt; 0</math></p>	<p><math>y = {}^g\log(x) \Leftrightarrow g^y = x</math>  <math>e^x = y \Leftrightarrow x = {}^e\log(y) = \ln(y)</math></p> <p><math>\ln(1) = 0; \ln(e) = 1</math></p> <p><math>\log(1) = 0; \log(10) = 1</math></p> <p>De grafiek heeft verticale asymptoot <math>x = 0</math></p> <p>Als <math>g &gt; 1</math> is de grafiek afnemend stijgend</p> <p>Als <math>0 &lt; g &lt; 1</math> is de grafiek afnemend dalend</p>
<p><b>Rekenregels voor logaritmen</b></p> <p><math>{}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)</math></p> <p><math>{}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)</math></p> <p><math>{}^g\log(a^n) = n \cdot {}^g\log(a)</math></p> <p><math>{}^g\log(a) = \frac{{}^p\log(a)}{{}^p\log(g)}</math></p>	<p>Deze volgen uit de rekenregels voor machten</p> <p>Dit geldt voor alle getallen <math>n</math></p> <p>Wordt vaak gebruikt met <math>p = 10</math> of met <math>p = e</math> om logaritmen te berekenen met de log of de ln functie van de rekenmachine</p>
<p><b>Goniometrie</b></p> <p>Sinus, cosinus en tangens in een rechthoekige driehoek</p> <p>Hoeken in de eenheidscirkel</p> <p>Hoeken in graden en in radialen</p> <p>Exacte waarden van de sinus en cosinus van standaardhoeken</p> <p>Stelling van Pythagoras</p> <p>Somformules</p>	<p>SOSCASTOA</p> <p><math>180^\circ = \pi \text{ rad}; 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}</math></p> <p>30-60-90 driehoek en 45-45-90 driehoek; exacte waarden cirkel</p> <p><math>\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1</math></p> <p>Zie formulelijst</p>

<p><b>Goniometrische functies</b></p> <p><math>f(x) = \sin(x)</math>; <math>g(x) = \cos(x)</math></p> <p>Periode van deze standaardfuncties</p> <p>Minima</p> <p>Maxima</p> <p>Nulpunten</p> <p>Vorm grafiek</p> <p>Symmetrie-eigenschappen</p> <p>Horizontale translaties</p>	<p>Bij goniometrische functies rekenen we vrijwel altijd in radialen</p> <p><math>2\pi</math></p> <p><math>\sin(x) = -1</math> voor <math>x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi</math>  <math>\cos(x) = -1</math> voor <math>x = \pi + k \cdot 2\pi</math></p> <p><math>\sin(x) = 1</math> voor <math>x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi</math>  <math>\cos(x) = 1</math> voor <math>x = 0 + k \cdot 2\pi</math></p> <p><math>\sin(x) = 0</math> voor <math>x = 0 + k \cdot \pi</math>  <math>\cos(x) = 0</math> voor <math>x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi</math></p> <p>Sinusoïde</p> <p><math>\sin(x) = \sin(\pi - x)</math>  <math>\cos(x) = \cos(-x)</math>  <math>-\sin(x) = \sin(-x) = \sin(\pi + x)</math>  <math>-\cos(x) = \cos(\pi - x) = \cos(\pi + x)</math></p> <p><math>\sin(x) = \cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)</math>  <math>\cos(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)</math></p>
<p><b>Algemene vorm van een sinusoïde</b></p> <p><math>f(x) = A + B \cdot \sin(C \cdot (x - D))</math></p>	<p><math>A</math> = evenwichtsstand  <math> B </math> = amplitude  <math>C = \frac{2\pi}{\text{periode}}</math>  Als <math>B &gt; 0</math> gaat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand in het punt <math>(D, A)</math> (beginpunt)</p>
<p><b>Harmonische trilling</b></p> <p><math>u = a \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)</math></p>	<p><math>a</math> = amplitude  <math>T</math> = trillingstijd (periode)  <math>f = \frac{1}{T}</math> = frequentie</p>



<p><b>Differentiëren</b></p> <p>Afgeleiden van de standaardfuncties</p> <p>Diverse notaties voor de afgeleide</p>	<p><math>f(x) = c</math> geeft <math>f'(x) = 0</math></p> <p><math>f(x) = x^a</math> geeft <math>f'(x) = ax^{a-1}</math></p> <p><math>f(x) = a^x</math> geeft <math>f'(x) = a^x \cdot \ln(a)</math></p> <p><math>f(x) = e^x</math> geeft <math>f'(x) = e^x</math></p> <p><math>f(x) = \ln(x)</math> geeft <math>f'(x) = \frac{1}{x}</math></p> <p><math>f(x) = \sin(x)</math> geeft <math>f'(x) = \cos(x)</math></p> <p><math>f(x) = \cos(x)</math> geeft <math>f'(x) = -\sin(x)</math></p>
<p><b>Regels voor het differentiëren van combinaties van functies</b></p> <p>Constante factorregel</p> <p>Somregel</p> <p>Productregel</p> <p>Quotiëntregel</p> <p>Kettingregel</p>	<p><math>f(x) = {}^g\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(g)} = \frac{1}{\ln(g)} \cdot \ln(x)</math></p> <p>geeft <math>f'(x) = \frac{1}{\ln(g)} \cdot \frac{1}{x}</math></p> <p><math>f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}</math> differentieer je met de quotiëntregel</p>

<p><b>Integreren</b></p> <p><math>F(x)</math> is een primitieve van <math>f(x)</math> als <math>F'(x) = f(x)</math></p> <p>Als <math>F(x)</math> een primitieve is van <math>f(x)</math>, dan is <math>G(x) = F(x) + C</math> dat ook.</p> <p>Bepaalde integraal:</p> $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ <p>Integraal en oppervlakte</p>	<p>De constante <math>C</math> verdwijnt immers bij het differentiëren</p> <p>In deze formule is <math>F(x)</math> een primitieve van <math>f(x)</math></p> <p>Als <math>f(x) \geq 0</math> op het interval <math>a \leq x \leq b</math>, dan is de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt begrensd door de lijn <math>x = a</math>, de <math>x</math>-as, de lijn <math>x = b</math> en de grafiek van <math>f</math> gelijk aan <math>\int_a^b f(x) dx</math></p>
--	---

<p><b>Standaardprimitieven</b></p> <p><math>f(x) = c</math> geeft <math>F(x) = cx + C</math></p> <p><math>f(x) = x^a</math> geeft <math>F(x) = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C</math></p> <p><math>f(x) = e^x</math> geeft <math>F(x) = e^x + C</math></p> <p><math>f(x) = \frac{1}{x}</math> geeft <math>F(x) = \ln( x ) + c</math></p> <p><math>f(x) = \sin(x)</math> geeft <math>F(x) = -\cos(x) + C</math></p> <p><math>f(x) = \cos(x)</math> geeft <math>F(x) = \sin(x) + C</math></p>	<p><math>a \neq -1</math></p> <p>Voor <math>x &lt; 0</math> geeft dit <math>F(x) = \ln(-x) + C</math></p>
<p><b>Rekenregels voor het primitiveren van combinaties van functies</b></p> <p>Constante factor regel</p> <p>Somregel</p> <p>Eenvoudige kettingregel</p>	<p><math>g(x) = c \cdot f(x)</math> geeft <math>G(x) = c \cdot F(x)</math></p> <p><math>s(x) = f(x) + g(x)</math> geeft <math>S(x) = F(x) + G(x)</math></p> <p><math>g(x) = f(ax + b)</math> geeft <math>G(x) = \frac{1}{a} \cdot F(ax + b)</math></p>
<p><b>Rekenregel voor bepaalde integralen</b></p>	$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ <p style="text-align: right;"><math>(a &lt; c &lt; b)</math></p>
<p><b>Toepassingen van de integraalrekening</b></p> <p>Berekenen van de oppervlakte van een vlakdeel met bovengrens <math>f(x)</math> en ondergrens <math>g(x)</math></p> <p>Berekenen van de inhoud van een omwentelingslichaam bij wentelen rond de <math>x</math>-as</p> <p>Berekenen van de inhoud van een omwentelingslichaam bij wentelen rond de <math>y</math>-as</p> <p>Integraal met variabele grenzen</p>	$\int_a^b f(x) - g(x) dx$ $\pi \int_a^b y^2 dx \text{ met } y = f(x)$ $\pi \int_c^d x^2 dy \text{ met } x = f^{inv}(y)$ $g(p) = \int_1^p f(x) dx = F(p) - F(1)$

## Meetkunde met coördinaten

*Uitgangspunt is een rechthoekig assenstelsel met gelijke eenheden langs de assen. Dit geldt ook als we grafieken van functies meetkundig analyseren.*

### Rechte lijnen

Algemene vorm van de vergelijking van een rechte lijn:  $mx + ny = c$

Veel gebruikte vorm:  $y = ax + b$

Richtingscoëfficiënt:  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

De vergelijking van de lijn door  $(p, 0)$  en  $(0, q)$  kan ook geschreven worden als  $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$

Niet voor verticale lijnen

De richtingscoëfficiënt is gelijk aan  $a$  uit de formule  $y = ax + b$

Dit kan niet als  $p = 0$  of  $q = 0$

### Rechte lijnen en hoeken

De richtingshoek van een rechte lijn is de hoek  $\alpha$  tussen de lijn en de  $x$ -as met  $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$

De hoek  $\beta$  tussen twee rechte lijnen is de kleinste hoek die deze in hun snijpunt maken, dus  $0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$

Twee lijnen staan loodrecht op elkaar als het product van hun richtingscoëfficiënten gelijk is aan  $-1$

$\tan(\alpha) = \text{richtingscoëfficiënt}$

Je bepaalt deze hoek door beide lijnen in een assenstelsel te tekenen en daarbij de richtingshoeken bij het snijpunt weer te geven.

*Het omgekeerde geldt ook:*  
Als twee lijnen loodrecht op elkaar staan, dan is het product van hun richtingscoëfficiënten gelijk aan  $-1$

<p><b>Loodlijn en afstand</b></p> <p>Loodlijn</p> <p>Afstand tussen de punten <math>A(a_1, a_2)</math> en <math>B(b_1, b_2)</math></p> <p>Projectie van een punt op een lijn</p> <p>Afstand tussen een punt en een lijn</p> <p>Afstand tussen twee evenwijdige lijnen</p> <p>Middelloodlijn</p> <p>Bissectrice</p>	<p>De loodlijn op de lijn met vergelijking <math>y = ax + b</math> heeft richtingscoëfficiënt <math>-\frac{1}{a}</math></p> <p><math> AB  = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}</math> wordt ook genoteerd als <math>d(A, B)</math></p> <p>Afstanden worden bepaald met behulp van loodlijnen. De formule voor de afstand tussen een punt en een rechte lijn mag je gebruiken, maar wordt niet bekend verondersteld.</p> <p>De middelloodlijn van de punten <math>A</math> en <math>B</math> bestaat uit alle punten <math>P</math> met <math> PA  =  PB </math></p> <p>Het bissectricepaar van de lijnen <math>l</math> en <math>m</math> bestaat uit alle punten <math>P</math> met <math>d(P, l) = d(P, m)</math></p>
--	---

<p><b>Meetkunde in driehoeken</b></p> <p>Stelling van Pythagoras</p> <p>Oppervlakte van een driehoek</p> <p>Hoekensom</p> <p>Sinusregel en cosinusregel</p> <p>Gelijkbenige driehoeken</p> <p>Gelijkzijdige driehoeken</p> <p>Gelijkvormige driehoeken</p> <p>Zwaartelijnen</p> <p>Zwaartepunt</p>	<p><math>\frac{1}{2} \times \text{basis} \times \text{hoogte}</math></p> <p>De som van de hoeken van een driehoek is <math>180^\circ</math></p> <p>De hoeken die de gelijke benen maken met de derde zijde zijn ook gelijk</p> <p>Alle hoeken zijn <math>60^\circ</math></p> <p>Twee driehoeken zijn gelijkvormig als de hoeken van de ene driehoek gelijk zijn aan die van de andere. Dan zijn de verhoudingen tussen de lengtes van de zijden van de ene driehoek ook gelijk aan die van de andere driehoek</p> <p>Het zwaartepunt verdeelt elke zwaartelijn in twee delen waarbij de lengte van het ene deel twee keer de lengte van het andere deel is</p>
--	--

<p><b>Vectoren</b></p> <p>Een vector geeft een verplaatsing weer over een bepaalde afstand in een bepaalde richting.</p> <p>De vector die de verplaatsing van punt <math>A</math> naar punt <math>B</math> geeft, noteren we als <math>\overrightarrow{AB}</math></p> <p>Nulvector <math>\vec{0}</math></p> <p>Vectoren kun je bij elkaar optellen</p> <p>Vectoren kun je vermenigvuldigen met een constante</p>	<p>Een vector <math>\vec{v}</math> heeft dus een lengte, die we aangeven met <math> \vec{v} </math>, en een richting</p> <p><math> \vec{0}  = 0</math>; <math>\vec{0}</math> is de enige vector die geen richting heeft</p> <p>Kop-staart-methode</p> <p><math>\vec{b} = c \cdot \vec{a}</math> met <math>c &gt; 0</math> heeft dezelfde richting als <math>\vec{a}</math>; <math> \vec{b}  = c \cdot  \vec{a} </math></p> <p><math>\vec{b} = c \cdot \vec{a}</math> met <math>c &lt; 0</math> heeft de tegengestelde richting van <math>\vec{a}</math>; <math> \vec{b}  = -c \cdot  \vec{a} </math></p>
<p><b>Vectoren met kentallen</b></p> <p><math>\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}</math> is een vector met kentallen 4 en 3</p> <p><math>\overrightarrow{OA}</math> is de plaatsvector van punt <math>A</math></p>	<p><math>\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}</math> geeft de verplaatsing van <math>O(0,0)</math> naar <math>A(4,3)</math>;</p>
<p><b>Rekenen met kentallen</b></p> <p>Optellen</p> <p>Vermenigvuldigen met een constante</p> <p>De lengte van een vector</p> <p>De kentallen van de nulvector</p> <p>Ontbinden langs de assen</p>	<p><math>\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + -1 \\ 3 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}</math></p> <p><math>-5 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \cdot -1 \\ -5 \cdot 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}</math></p> <p><math>\left  \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right  = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5</math></p> <p><math>\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}</math></p> <p><math>\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}</math></p>

<p><b>Inwendig product</b></p> $\vec{a} \cdot \vec{b} =  \vec{a}  \cdot  \vec{b}  \cdot \cos(\alpha)$ <p>Als twee vectoren loodrecht op elkaar staan, is hun inproduct 0</p>	<p><b>Kortweg inproduct</b></p> $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$ $\cos(\alpha) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{ \vec{a}  \cdot  \vec{b} }$ <p><i>Omgekeerd geldt:</i> Als het inproduct van twee vectoren 0 is, dan staan ze loodrecht op elkaar (behalve als is één van beide vectoren de nulvector is)</p>
<p><b>Vectorvoorstelling van een lijn</b></p> $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ <p>Steunvector <math>\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}</math>; Richtingsvector <math>\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}</math></p> <p>Een normaalvector van een lijn is een vector die loodrecht staat op de richtingsvector van de lijn</p>	<p>Wordt ook parametervoorstelling genoemd</p> <p>Het getal <math>\lambda</math> wordt parameter genoemd</p> <p>De lijn <math>l</math> met richtingsvector <math>\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}</math> heeft normaalvector <math>\vec{n}_l = \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}</math></p> <p>De lijn <math>m</math> met vergelijking <math>px + qy = c</math> heeft normaalvector <math>\vec{n}_m = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}</math></p>

<p><b>Meetkunde in cirkels</b></p> <p>Middelpuntvergelijking van de cirkel met middelpunt <math>M(a, b)</math> en straal <math>r</math>.  <math>(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2</math></p> <p>De vergelijking van een cirkel wordt ook vaak geschreven in de vorm  <math>x^2 + y^2 + px + qy + s = 0</math></p> <p>Snijpunt(en) met een rechte lijn berekenen</p> <p>Raaklijn, raakpunt</p> <p>Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt</p> <p>Snijpunten cirkels berekenen</p> <p>Rakende cirkels</p> <p>Raaklijnen door punt <math>P</math> buiten de cirkel</p> <p>Afstand tussen twee cirkels berekenen</p> <p>Afstand tussen een lijn en een cirkel berekenen</p>	<p>Omzetten van de eerste naar de tweede vorm met haakjes wegwerken</p> <p>Omzetten van de tweede naar de eerste vorm met kwadraat afsplitsen</p> <p>Door substitutie krijg je een tweedegraads vergelijking met 0, 1 of 2 oplossingen</p> <p>richtingscoëfficiënt raaklijn <math>\times</math> richtingscoëfficiënt straal = <math>-1</math></p> <p>Eliminatie van <math>x^2 + y^2</math> geeft een vergelijking van de lijn door de snijpunten</p> <p>De gemeenschappelijke raaklijn staat loodrecht op de lijn door de middelpunten</p> <p>De raakpunten liggen even ver van punt <math>P</math></p> <p>M.b.v. de lijn door de middelpunten</p> <p>M.b.v. de loodlijn uit het middelpunt van de cirkel op de lijn</p>
<p><b>Driehoeken en cirkels</b></p> <p>De omgeschreven cirkel van een driehoek gaat door de drie hoekpunten</p> <p>De ingeschreven cirkel van een driehoek raakt de drie zijden</p> <p>Stelling van Thales</p> <p>Omgekeerde stelling van Thales</p>	<p>Het middelpunt is het snijpunt van de middelloodlijnen van de zijden</p> <p>Het middelpunt is het snijpunt van de bissectrices van de hoeken</p> <p>Een driehoek waarvan een zijde een middellijn is van de omgeschreven cirkel is rechthoekig</p> <p>In een rechthoekige driehoek is het midden van de schuine zijde het middelpunt van de omgeschreven cirkel</p>

<p><b>Grafieken</b></p> <p>Verloop van de grafieken van de standaardfuncties</p>	
<p><b>Tekenen en schetsen</b></p>	<p>Bij het tekenen van een grafiek moet je de waarde van de getallen op de assen aangeven, de coördinaten van meerdere punten berekenen, eventuele asymptoten aangeven en zorgen dat het domein, het bereik en andere kenmerken van de functie duidelijk af te lezen zijn.</p> <p>In een schets van een grafiek moet je het verloop van de grafiek weergeven en minima, maxima en asymptoten aangeven.</p>
<p><b>Transformaties</b></p> <p>Horizontale translatie over c eenheden</p> <p>Verticale translatie over c eenheden</p> <p>Vermenigvuldiging t.o.v. de y-as</p> <p>Vermenigvuldiging t.o.v. de x-as</p> <p>Spiegeling in de y-as</p> <p>Spiegeling in de x-as</p>	<p><math>g(x) = f(x - c)</math></p> <p><math>g(x) = f(x) + c</math></p> <p><math>g(x) = f\left(\frac{1}{c} \cdot x\right)</math></p> <p><math>g(x) = c \cdot f(x)</math></p> <p><math>g(x) = f(-x)</math></p> <p><math>g(x) = -f(x)</math></p>
<p><b>Lijnsymmetrie in de y-as</b></p>	<p><math>f(-x) = f(x)</math></p>
<p><b>Puntsymmetrie in de oorsprong</b></p>	<p><math>f(-x) = -f(x)</math></p>
<p><b>Verticale afstand tussen twee grafieken</b></p>	<p>De afstand tussen de snijpunten van de grafieken van twee functies met de verticale lijn <math>x = p</math> is <math> f(p) - g(p) </math></p>



Asymptoten en limieten	
Limieten berekenen	Eenvoudige voorbeelden: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2+x} = \frac{1}{4}$
Horizontale asymptoot	Als $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$ of $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$
Verticale asymptoot	Als $\lim_{x \uparrow a} f(x) = \infty$ of $\lim_{x \uparrow a} f(x) = -\infty$ of $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \infty$ of $\lim_{x \downarrow a} f(x) = -\infty$
Verticale asymptoot bij een gebroken functie	$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ heeft een verticale asymptoot als $g(x) = 0 \wedge f(x) \neq 0$
Scheve asymptoot	Als $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ of $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$
Perforatie	Als $\lim_{x \uparrow a} f(x) = \lim_{x \downarrow a} f(x)$ , maar $f(a)$ niet bestaat
Sprong	Als $\lim_{x \uparrow a} f(x) \neq \lim_{x \downarrow a} f(x)$

Toepassingen van de afgeleide	
<p><math>f'(a)</math> is de helling van de (raaklijn aan de) grafiek van <math>f</math> in het punt <math>(a, f(a))</math></p>	<p><math>f'(a)</math> = richtingscoëfficiënt raaklijn = <math>\tan</math> (<i>richtingshoek</i>) in punt <math>(a, f(a))</math></p>
<p>De hoek tussen twee krommen in een punt <math>P</math></p>	<p>Is de hoek tussen de raaklijnen aan de krommen in punt <math>P</math></p>
<p>De grafiek is stijgend als <math>f'(x) &gt; 0</math> en dalend als <math>f'(x) &lt; 0</math></p>	
<p>In een minimum en in een maximum geldt <math>f'(x) = 0</math></p>	<p>Je berekent de punten waar <math>f</math> een minimum of een maximum kan hebben met <math>f'(x) = 0</math>. Daarna moet je met een schets van de grafiek nagaan in welke punten de grafiek een minimum dan wel een maximum heeft.</p>
<p>Minima en maxima worden samen extremen genoemd.</p>	
<p>De punten waar de grafiek een minimum of een maximum heeft, heten de toppen van de grafiek.</p>	<p><math>f(x) = g(x)</math> en <math>f'(x) = g'(x)</math></p>
<p>Rakende grafieken</p>	<p><math>f(x) = g(x)</math> en <math>f'(x) \cdot g'(x) = -1</math></p>
<p>Loodrecht snijdende grafieken</p>	<p>Je berekent de punten waar <math>f</math> een buigpunt kan hebben met <math>f''(x) = 0</math>. Daarna moet je eigenlijk nog nagaan in welke van deze punten de afgeleide een extreem heeft, maar het zal meestal uit de vraagstelling al duidelijk zijn of er sprake is van een buigpunt.</p>
<p>In een punt waar de afgeleide een extreem heeft, heeft de grafiek een buigpunt.</p>	
<p>In zo'n buigpunt geldt <math>f''(x) = 0</math></p>	
<p>Als <math>f'(x) &gt; 0</math> en <math>f''(x) &gt; 0</math> is de grafiek toenemend stijgend</p>	
<p>Als <math>f'(x) &gt; 0</math> en <math>f''(x) &lt; 0</math> is de grafiek afnemend stijgend</p>	
<p>Als <math>f'(x) &lt; 0</math> en <math>f''(x) &gt; 0</math> is de grafiek afnemend dalend</p>	
<p>Als <math>f'(x) &lt; 0</math> en <math>f''(x) &lt; 0</math> is de grafiek toenemend dalend</p>	<p>Maak een schets van de grafiek en let in het bijzonder op de toppen</p>
<p>Aantal snijpunten van de grafiek met een horizontale lijn</p>	

## Bewegingsvergelijkingen

Een parametervoorstelling legt de positie van een punt  $P(x(t), y(t))$  vast met behulp van de parameter  $t$ .

Als  $t$  de tijd is, spreek je over de bewegingsvergelijkingen van het punt. De bijbehorende grafiek heet de baan van het punt

Toppen van de baan

Als  $x(t)$  en  $y(t)$  eerstegraadsfuncties zijn, is de baan een rechte lijn

De baan van een punt  $P$  met bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x(t) = a + r \cos(t) \\ y(t) = b + r \sin(t) \end{cases}$$

Is een cirkel met middelpunt  $M(a, b)$  en straal  $r$

Als  $x$  en  $y$  periodieke functies zijn, dan is de periode van de beweging het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van de periodes van  $x$  en  $y$

Snelheidsvector

Snelheid in de  $x$ -richting

Snelheid in de  $y$ -richting

Baansnelheid

Richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de baan in punt  $P$

Versnellingsvector

Baanversnelling

Bijvoorbeeld

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = 2t \end{cases} \text{ of als vector } \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$$

Horizontale raaklijn als  $x'(t) \neq 0$  en  $y'(t) = 0$

Verticale raaklijn als  $x'(t) = 0$  en  $y'(t) \neq 0$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at + b \\ ct + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

De vergelijking van deze cirkel is dus

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_x = \begin{pmatrix} x'(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

$$\frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{dv}{dt} \text{ met } v \text{ de baansnelheid}$$

## Algebraïsche vaardigheden

Hieronder een overzicht van algebraïsche vaardigheden die de kandidaten voor het tentamen wiskunde B van de CCVW moeten beheersen. Ook voor deze lijst geldt dat hij met de uiterste zorgvuldigheid is samengesteld, maar dat het voor kan komen dat een vaardigheid die wel onder het tentamenprogramma valt, niet aan de orde komt in deze lijst.

Vaardigheid	Opmerking / Toelichting
<b>Standaardvergelijkingen oplossen</b>	
Eerstegraads	$ax + b = px + q$
Tweedegraads	$ax^2 + bx + c = 0$
Machtsvergelijkingen met een positieve even exponent	$x^n = a \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[n]{a} \quad (a \geq 0)$
Andere machtsvergelijkingen	$x^n = a \Leftrightarrow x = a^{\frac{1}{n}}$
Exponentiële en logaritmische vergelijkingen die zich daartoe lenen exact oplossen	${}^g\log(g^n) = a \Leftrightarrow g^n = g^a \Leftrightarrow n = a$
Exponentiële vergelijkingen oplossen met behulp van logaritmen	$g^x = a \Leftrightarrow x = {}^g\log(a)$
Goniometrische vergelijkingen exact oplossen	$\sin(x) = \sin(A); \cos(x) = \cos(A);$ $\sin(x) = c$ en $\cos(x) = c$ met $c = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}, \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}, \pm 1$
Goniometrische vergelijkingen oplossen met inverse functies	$\sin(x) = c \Leftrightarrow \sin(x) = \sin(\sin^{-1}(c))$ $\cos(x) = c \Leftrightarrow \cos(x) = \cos(\cos^{-1}(c))$
Absolute-waarde-vergelijkingen	$ x  = a \Leftrightarrow x = \pm a \quad (a \geq 0)$
<b>Ongelijkheden oplossen</b>	Bij het grafisch oplossen van ongelijkheden moeten de snijpunten van de grafieken algebraïsch worden berekend
<b>Stelsels van vergelijkingen oplossen</b>	Met eliminatie en/of substitutie
<b>Opstellen van de vergelijking van een rechte lijn</b>	Richtingscoëfficiënt of normaalvector bepalen en samen met de coördinaten van een punt invullen in één van de standaardformules

<p><b>Vergelijkingen en functievoorschriften bewerken</b></p> <p>Een vergelijking splitsen</p> <p>Een factor buiten haakjes halen</p> <p>Haakjes wegwerken</p> <p>Bewerkingen met breuken</p> <p>Bewerkingen met wortels</p>	$A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \vee B = 0$ $A^2 = B^2 \Leftrightarrow A = \pm B$ $A \cdot B = A \cdot C \Leftrightarrow A = 0 \vee B = C$ $A \cdot B + A \cdot C = A(B + C)$ $(A + B)(C + D) = AC + AD + BC + BD$ <p>Optellen (gelijknamig maken)            Vermenigvuldigen en delen            Kruislings vermenigvuldigen:</p> $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow AD = BC \wedge BD \neq 0$ $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow A = B^2 \wedge A \geq 0$
<p><b>Vergelijkingen oplossen met substitutie</b></p>	$x^4 + 4x^2 - 5 = 0 \text{ met } y = x^2$ $e^{2x} + 4e^x - 5 \text{ met } y = e^x$ <p>geven beide <math>y^2 + 4y - 5 = 0</math></p>
<p><b>Variabelen vrijmaken</b></p>	<p>Los <math>x</math> op uit <math>y = f(x)</math></p>
<p><b>Toepassen van rekenregels en eigenschappen</b></p>	<p>Voor machten en logaritmen en bij goniometrische vergelijkingen/functies</p>
<p><b>Formules substitueren in andere formules</b></p>	<p>Met correct gebruik van haakjes</p>
<p><b>Rekenen met parameters in functievoorschriften</b></p> <p>Algemeen</p> <p>Aantal snijpunten met grafieken van tweedegraads functies</p> <p>Kromme door de toppen van een grafiek</p> <p>Rakende grafieken</p>	<p>Bij differentiëren en integreren is de parameter een constante; in (stelsels) vergelijkingen is de parameter vaak een extra onbekende</p> <p><math>D = 0</math> geeft dan een vergelijking voor de parameter</p> <p>Elimineer de parameter uit het stelsel vergelijkingen <math>y = f_p(x)</math> en <math>f'_p(x) = 0</math></p> <p><math>f_p(x) = g(x)</math> en <math>f'_p(x) = g'(x)</math></p>

## Aanbevolen leermateriaal

Getal en Ruimte vwo B **elfde** of **twaalfde** editie, deel 1, 2, 3 en 4

Alle hoofdstukken met uitzondering van deel 3, hoofdstuk K.

*Bij de examentraining (deel 4, hoofdstuk 16) dient u er rekening mee te houden dat de grafische rekenmachine niet toegestaan is bij het voortentamen wiskunde van de CCVW. Er zullen dan ook geen vragen gesteld worden die niet zonder grafische rekenmachine beantwoord kunnen worden.*

ISBN en overige informatie op [www.getalenruimte.noordhoff.nl](http://www.getalenruimte.noordhoff.nl)

De leerstof is ook terug te vinden in de andere vwo-lesmethoden, zoals Moderne Wiskunde en Netwerk.

Als voorbereiding op het bestuderen van bovenstaande boeken wordt aanbevolen: *Wiswijs* (Pach en Wisbrun, vierde druk 2018, ISBN 9789001876265) voor zelfstudie zijn oudere drukken uiteraard ook bruikbaar.