Uitwerkingen CCVW Wiskunde A 21 juli 2025

Vraag 1a - 7 punten

$f'(x) = 3 \cdot 4x^3 - 20 \cdot 3x^2 + 36 \cdot 2x = 12x^3 - 60x^2 + 72x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x(x^2 - 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow 12x = 0 \vee x^2 - 5x + 6 = 0$

$12x = 0 \Leftrightarrow x = 0;\ \ x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$

Mag uiteraard ook met de abc-formule.

$f(0) = 3 \cdot 0 - 20 \cdot 0 + 36 \cdot 0 + 3 = 3$

$f(2) = 3 \cdot 16 - 20 \cdot 8 + 36 \cdot 4 + 3 = 48 - 160 + 144 + 3 = 35$

$f(3) = 3 \cdot 81 - 20 \cdot 27 + 36 \cdot 9 + 3 = 243 - 540 + 324 + 3 = 30$

De minimale waarde van $f(x)$ is dus $f(0) = 3$

Vraag 1b - 7 punten

$g'(x) = -1 + \dfrac{6x}{2\sqrt{3x^2 - 2}} = -1 + \dfrac{3x}{\sqrt{3x^2 - 2}}$

$g'(x) = 2 \Leftrightarrow -1 + \dfrac{3x}{\sqrt{3x^2-2}} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{3x}{\sqrt{3x^2-2}} = 3 \Leftrightarrow 3x = 3\sqrt{3x^2-2} \Leftrightarrow x = \sqrt{3x^2-2}$

Kwadrateren geeft $x^2 = 3x^2 - 2 \Leftrightarrow -2x^2 = -2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$

$g'(1) = -1 + \frac{3 \cdot 1}{1} = -1 + 3 = 2;\ \ g'(-1) = -1 + \frac{3 \cdot -1}{1} = -1 - 3 = -4$

De enige oplossing is dus $x = 1$

Vraag 1c - 5 punten

$27^x = 9^{x-1} \Leftrightarrow 27^x = 9^x \cdot 9^{-1} \Leftrightarrow 27^x = \frac{1}{9} \cdot 9^x \Leftrightarrow \left(\dfrac{27^x}{9^x}\right) = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \left(\dfrac{27}{9}\right)^x = \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{9}$

$\Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{3^2} \Leftrightarrow 3^x = 3^{-2} \Leftrightarrow x = -2$ of $x = {}^3\log\left(\frac{1}{9}\right) = -2$

Alternatief 1:

$27^x = 9^{x-1} \Leftrightarrow (3^3)^x = (3^2)^{x-1} \Leftrightarrow 3^{3x} = 3^{2(x-1)} \Leftrightarrow 3x = 2(x-1) \Leftrightarrow 3x = 2x - 2 \Leftrightarrow x = -2$

Alternatief 2:

$27^x = 9^{x-1} \Leftrightarrow \log(27^x) = \log(9^{x-1}) \Leftrightarrow x \cdot \log(27) = (x-1) \cdot \log(9) \Leftrightarrow x = (x-1) \cdot \dfrac{\log(9)}{\log(27)}$

$\Leftrightarrow x = (x-1) \cdot \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3}x = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow x = -2$

Alternatief 3:

$27^x = 9^{x-1} \Leftrightarrow {}^3\log(27^x) = {}^3\log(9^{x-1}) \Leftrightarrow x \cdot {}^3\log(27) = (x-1) \cdot {}^3\log(9) \Leftrightarrow x \cdot 3 = (x-1) \cdot 2$

$\Leftrightarrow 3x = 2(x-1) \Leftrightarrow 3x = 2x - 2 \Leftrightarrow x = -2$

.

Vraag 2a - 2 punten

$t = 0$ geeft $V = \frac{700\cdot(0+2)}{0+320} = \frac{1400}{320} = 4{,}375$. Dat zijn 4375 stuks

Vraag 2b - 5 punten

$V = 20 \Leftrightarrow \dfrac{700t + 1400}{t^2 + 320} = 20 \Leftrightarrow 700t + 1400 = 20(t^2 + 320) \Leftrightarrow 700t + 1400 = 20t^2 + 6400$

$\Leftrightarrow 20t^2 - 700t + 5000 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 35t + 250 = 0 \Leftrightarrow (t - 10)(t - 25) = 0 \Leftrightarrow t = 10 \vee t = 25$

Mag uiteraard ook met de abc-formule.

$V \geq 20 \Leftrightarrow 10 \leq t \leq 25$

Dat is van dag 11 (als $t = 10$) t/m dag 26 (als $t = 25$), dus dat is op 16 dagen.

Vraag 2c - 7 punten

$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{700(t^2 + 320) - 700(t + 2)2t}{(t^2 + 320)^2}$

$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 0 \Leftrightarrow 700(t^2 + 320) - 700(t + 2)2t = 0 \Leftrightarrow t^2 + 320 - (t + 2)2t = 0 \Leftrightarrow t^2 + 320 - 2t^2 - 4t = 0$

$\Leftrightarrow -t^2 - 4t + 320 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 4t - 320 = 0 \Leftrightarrow (t + 20)(t - 16) = 0 \Leftrightarrow t = -20 \vee t = 16$

Kan ook met $t = \frac{4 \pm \sqrt{16+1280}}{-2} = \frac{4 \pm 36}{-2} = -2 \pm 18$

$t = -20$ is niet mogelijk, dus het maximum ligt op $t = 16$

Dit geeft $V = \frac{700\cdot18}{256+320} = \frac{12600}{576} = 21{,}875$

Het maximaal aantal verkochte stuks per dag is dus 21 875

Vraag 3a - 3 punten

$\sigma_{sigaren} = \sqrt{100}\cdot 0{,}2 = 2$; $\sigma_{totaal} = \sqrt{\sigma_{sigaren}^2 + \sigma_{kistje}^2} = \sqrt{2^2 + 1{,}5^2} = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$

Vraag 3b - 5 punten

$\mu_{totaal} = \mu_{sigaren} + \mu_{kistje} = 100 \cdot 4{,}8 + 200 = 480 + 200 = 680$

$677{,}5 = \mu_{totaal} - \sigma_{totaal}$; $685 = \mu_{totaal} + 2\sigma_{totaal}$

Volgens de vuistregels ligt 68% van de populatie tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$

en ligt 95% van de populatie tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$

Dit betekent dat $\frac{1}{2}\cdot 68\% = 34\%$ tussen de grenzen $\mu - \sigma$ en μ ligt

en dat $\frac{1}{2}\cdot 95\% = 47{,}5\%$ tussen de grenzen μ en $\mu + 2\sigma$ ligt.

De gevraagde kans is dus $0{,}34 + 0{,}475 = 0{,}815$

Vraag 3c - 2 punten

H_0: $\mu = 4{,}8$; H_1: $\mu < 4{,}8$

Vraag 3d - 5 punten

De toetsingsgrootheid G is normaal verdeeld met $\mu_G = 4{,}8$ en $\sigma_G = \frac{0{,}2}{\sqrt{10}} \approx 0{,}063$

Bij deze linkszijdige toetsingsprocedure met $\alpha = 0{,}05$ is de grenswaarde van het kritieke gebied

$g = \mu_G - 1{,}645\sigma_G = 4{,}8 - 1{,}645 \cdot \dfrac{0{,}2}{\sqrt{10}} \approx 4{,}696$

De steekproefuitkomst 4,6 is kleiner dan deze grenswaarde.
De nulhypothese wordt daarom verworpen

Alternatief:

De toetsingsgrootheid G is normaal verdeeld met $\mu_G = 4{,}8$ en $\sigma_G = \frac{0{,}2}{\sqrt{10}} \approx 0{,}063$

De steekproefuitkomst 4,6 ligt 0,2 g onder μ_G, dat is $\frac{0{,}2}{0{,}063}\sigma_G \approx 3{,}2\sigma_G$

Bij een éénzijdige toets met $\alpha = 0{,}05$ wordt de nulhypothese verworpen als de steekproefuitkomst meer dan $1{,}645\sigma_G$ van μ_G ligt en dat is hier het geval

Vraag 4a - 3 punten

X is binomiaal verdeeld met $n = 7$ en $p = 0{,}1$

$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{7 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = \sqrt{0{,}63} \approx 0{,}7937$

Vraag 4b - 5 punten

$P(X = 1) = \binom{7}{1} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^6 = 7 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^6 = 0{,}3720087$

$P(X = 2) = \binom{7}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^5 = 21 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}9^5 = 0{,}1240029$

Er zijn geen andere mogelijkheden, want als Rob meer dan 2 “gouden” munten heeft, heeft hij minder dan 5 “zilveren” munten.

De gevraagde kans is dus $0{,}3720087 + 0{,}1240029 = 0{,}4960116$

Vraag 4c - 5 punten

$P(geen\ \text{"}gouden\text{"}\ munt) = P(5\ \text{"}zilveren\text{"}\ munten) = \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{5 \cdot 4}{10 \cdot 9} = \frac{2}{9} \quad \left(= \frac{\binom{8}{5}}{\binom{10}{5}} = \frac{56}{252} \right)$

$P(tenminste\ één\ \text{"}gouden\text{"}\ munt) = 1 - P(geen\ \text{"}gouden\text{"}\ munt) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$

Alternatief:

$P(tenminste\ één\ \text{"}gouden\text{"}\ munt) = P(één\ \text{"}gouden\text{"}\ munt) + P(twee\ \text{"}gouden\text{"}\ munten)$

$= \frac{\binom{2}{1}\binom{8}{4}}{\binom{10}{5}} + \frac{\binom{2}{2}\binom{8}{3}}{\binom{10}{5}} = \frac{2 \cdot 70}{252} + \frac{1 \cdot 56}{252} = \frac{5}{9} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$

Vraag 5a - 5 punten

De groeifactor over twee jaar is $\frac{450}{50} = 9$

De groeifactor over één jaar is dus $9^{\frac{1}{2}} = 3$

1 juli 2027 is $6\frac{1}{2}$ jaar na 1 januari 2021

Het aantal kevers op 1 juli 2027 wordt zodoende gegeven door $50 \cdot 3^{6\frac{1}{2}} \approx 63\,133$

Kan ook berekend worden met $50 \cdot \left(\frac{450}{50}\right)^{\frac{6\frac{1}{2}}{2}} \approx 63\,133$ *en met* $450 \cdot 3^{4\frac{1}{2}} \approx 63\,133$.

Vraag 5b - 6 punten

$N = 60\,000 \Leftrightarrow 150\,000 = 60\,000(1 + 3000\mathrm{e}^{-1,1t}) \Leftrightarrow 1 + 3000\mathrm{e}^{-1,1t} = \dfrac{150\,000}{60\,000}$

$\Leftrightarrow 1 + 3000\mathrm{e}^{-1,1t} = 2,5 \Leftrightarrow 3000\mathrm{e}^{-1,1t} = 1,5 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-1,1t} = \dfrac{1,5}{3000} = 0,0005$

Dit geeft $-1,1t = \ln(0,0005) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(0,0005)}{-1,1} \approx 6,91$

6 jaar en $0,91 \times 12 = 10,92$ maanden na 1 januari 2021 is in november 2027

Vraag 6a - 2 punten

$a = evenwichtsstand = \dfrac{minimum + maximum}{2} = \dfrac{36,6 + 37,2}{2} = 36,9$

$b = amplitude = maximum - a = 42,2 - 36,9 = 0,3 \ \left(= a - minimum = \frac{maximum - minimum}{2}\right)$.

Vraag 6b - 2 punten

$c = \dfrac{2\pi}{periode} = \dfrac{2\pi}{24} = \dfrac{1}{12}\pi \quad (\approx 0,2618)$

Vraag 6c - 5 punten

T heeft een beginpunt als $t - 8,9 = 0 \Leftrightarrow t = 8,9$

Het maximum is een kwart periode na $t = 8,9$

en het minimum is een kwart periode voor $t = 8,9$

Het maximum is dus op $t = 8,9 + 6 = 14,9$

en het minimum is op $t = 8,9 - 6 = 2,9$

$0,9$ uur $= 0,9 \times 60 = 54$ minuten

T is zodoende maximaal om $14{:}54$ en minimaal om $2{:}54$

Alternatief:

T is maximaal als $\sin\big(c(t - 8,9)\big) = 1 \Leftrightarrow c(t - 8,9) = \frac{1}{2}\pi$

Dit geeft $\frac{1}{12}\pi(t - 8,9) = \frac{1}{2}\pi \Leftrightarrow t - 8,9 = 6 \Leftrightarrow t = 14,9$

Een halve periode eerder is T minimaal

Dat is op $t = 14,9 - 12 = 2,9$

$0,9$ uur $= 0,9 \times 60 = 54$ minuten

T is zodoende maximaal om $14{:}54$ en minimaal om $2{:}54$

