CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

Tentamen Wiskunde A

Datum:	21 juli 2025
Tijd:	13.30 – 16.30 uur
Aantal opgaven:	6

Lees onderstaande aanwijzingen s.v.p. goed door voordat u met het tentamen begint. Als u zich niet aan deze aanwijzingen houdt, kan dit tot aftrek van punten leiden.

Zet uw naam op alle in te leveren antwoordbladen.

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad.

Laat bij elke vraag door middel van een redenering, een berekening, of een toelichting op het gebruik van de rekenmachine zien hoe het antwoord is verkregen. Zonder redenering of berekening worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend (*zie ook opgave 1*).

Schrijf leesbaar en met inkt. Gebruik geen correctievloeistof zoals tipp-ex. Gebruik van een potlood is alleen toegestaan bij het tekenen van grafieken.

Bij het tentamen kunt u gebruik maken van een eenvoudige wetenschappelijke rekenmachine. **Overige hulpmiddelen, zoals een grafische rekenmachine, een rekenmachine met de mogelijkheid om integralen te berekenen, een formulekaart, BINAS of een tabellenboek, zijn NIET toegestaan**.

Op de laatste twee bladzijden van dit tentamen is een lijst met formules afgedrukt.

Het gebruik van een mobiele telefoon of andere telecommunicatieapparatuur tijdens het tentamen is verboden. Zet uw **mobiele telefoon uit** en stop deze in uw tas.

Te behalen punten per onderdeel:

Opgave	1	2	3	4	5	6
a	7	2	3	3	5	2
b	7	5	5	5	6	2
c	5	7	2	5		5
d			5			
Totaal	19	14	15	13	11	9

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{behaald aantal punten}}{9} + 1$$

U bent geslaagd als uw cijfer 5,5 of hoger is.

Opgave 1 – Algebraïsche vaardigheden

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

*Bij het **algebraïsch** uitwerken van opgaven moet de berekening volledig op papier worden gegeven. Het aflezen van functiewaarden uit een al dan niet met een rekenmachine gemaakte tabel is geen algebraïsche berekening. De rekenmachine mag wel gebruikt worden voor eenvoudige berekeningen en voor het benaderen van getallen zoals* $\sqrt{2}$ *en* $\log(3)$.
Tenzij anders vermeld, dienen alle berekeningen in dit tentamen algebraïsch te worden uitgewerkt.

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 3x^4 - 20x^3 + 36x^2 + 3$.

7pt a Bereken algebraïsch de minimale waarde van $f(x)$.

De functie g wordt gegeven door $g(x) = -x + \sqrt{3x^2 - 2}$.

7pt b Bereken algebraïsch de waarde(n) van x waarvoor de helling van de grafiek van g in het punt $A(x, g(x))$ gelijk is aan 2.

5pt c Los algebraïsch op: $27^x = 9^{x-1}$

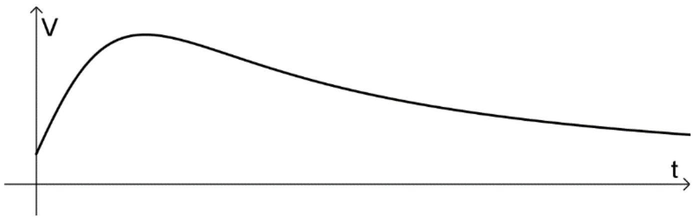
Opgave 2 – Oude nieuwtjes

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Als een nieuw product op de markt gebracht wordt, neemt de verkoop vaak eerst snel toe om daarna weer te dalen als het nieuwtje ervan af is. Dit verschijnsel wordt voor een zeker product beschreven met de formule

$$V = \frac{700(t+2)}{t^2+320}$$

In deze formule is V het aantal verkochte stuks per dag in duizenden en is t de tijd in dagen, met $t = 0$ op de eerste verkoopdag.
In de figuur hieronder ziet u de grafiek die het verband tussen V en t weergeeft.



2pt a Hoeveel stuks van dit product worden er op de eerste verkoopdag verkocht?

5pt b Bereken algebraïsch het aantal dagen waarop er 20 000 of meer stuks van dit product verkocht worden.

7pt c Bereken met behulp van de afgeleide $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ het maximale aantal stuks van dit product dat per dag verkocht wordt.

Opgave 3 – De sigaren van Bert

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Bert rookt sigaren van het type “wilde cigarros”.
Het gewicht van deze sigaren is normaal verdeeld met een gemiddelde van $\mu = 4{,}8$ g en een standaardafwijking van $\sigma = 0{,}2$ g.

Deze sigaren worden verkocht in kistjes die 100 sigaren bevatten.
Het gewicht van de lege kistjes is normaal verdeeld met een gemiddelde van $\mu = 200{,}0$ g en een standaardafwijking van $\sigma = 1{,}5$ g.

De standaardafwijking van het totale gewicht van een kistje gevuld met 100 sigaren is $2{,}5$ g.

3pt **a** Toon dit aan met een algebraïsche berekening.

5pt **b** Gebruik de vuistregels voor normale verdelingen om de kans te berekenen dat het totale gewicht van een kistje gevuld met 100 sigaren tussen $677{,}5$ g en $685{,}0$ g ligt.

Bert wil een nieuw merk cigarros proberen. Dit merk is goedkoper dan het merk dat hij gewoonlijk rookt en het smaakt net zo goed. Daarom vermoedt hij, dat het gemiddelde gewicht van deze sigaren lager is dan $4{,}8$ g. Om dit te toetsen weegt hij 10 sigaren van dit nieuwe merk.
In deze toetsingsprocedure neemt hij aan dat het gewicht van de sigaren van het nieuwe merk normaal verdeeld is met een standaardafwijking van $\sigma = 0{,}2$ g.
De onbetrouwbaarheidsdrempel van deze toetsingsprocedure is $\alpha = 0{,}05$.

2pt **c** Formuleer de nulhypothese en de alternatieve hypothese voor deze toetsingsprocedure.

5pt **d** Wat is de conclusie van deze toetsingsprocedure als het gemiddelde gewicht van deze 10 sigaren $4{,}6$ g is?

Opgave 4 – De dropjes van Rob en Lianne

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

De Cenvo fabriek verkoopt dropjes in kleine zakjes. Om de honderdste verjaardag van deze fabriek te vieren stopt men één goud- of zilverkleurige munt in ieder zakje. In 10% van de zakjes zit een “gouden” munt, in 90% van de zakjes zit een “zilveren” munt.

Rob koopt 7 van deze zakjes. Het aantal “gouden” munten in deze 7 zakjes is een toevalsvariabele X.

3pt a Bereken de standaardafwijking $\sigma(X)$ van deze toevalsvariabele.

Als je één “gouden” en vijf “zilveren” munten inlevert, krijg je een zakje Cenvo drop gratis.

5pt b Bereken de kans dat Rob een gratis zakje Cenvo drop kan krijgen omdat hij de benodigde munten vindt in de 7 zakjes die hij koopt.

Lianne koopt 10 zakjes Cenvo drop. In deze zakjes zitten 2 “gouden” munten en 8 “zilveren” munten. Zij pakt blindelings 5 van deze munten.

5pt c Bereken de kans zij tenminste één “gouden” munt pakt.

Opgave 5 – Twee groeimodellen

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Op 1 januari 2021 zijn 50 exemplaren van een keversoort ontsnapt uit een laboratorium op een afgelegen eiland. Aangezien deze keversoort van nature niet voorkomt op dit eiland, namen de onderzoekers aan dat deze kevers niet lang zouden overleven.
De kevers bleken zich echter goed thuis te voelen op het eiland en na twee jaar, dat is op 1 januari 2023, waren er al 450 kevers. De onderzoekers houden de populatie kevers daarom verder goed in de gaten en ze stellen modellen op voor de groei van het aantal kevers.

In het eerste model gaat men ervan uit dat de populatie exponentieel groeit.

5pt **a** Bereken algebraïsch hoeveel kevers er volgens dit model op dit eiland zullen zijn op 1 juli 2027 als hun aantal exponentieel groeit.

Na verloop van tijd blijkt dat het aantal kevers minder snel toeneemt dan het exponentiële model voorspelt. Daarom onderzoekt men een tweede model met een groeiformule van de vorm

$$N = \frac{150\,000}{1 + 3000 \cdot \mathrm{e}^{-1{,}1t}}$$

In deze formule is N het aantal kevers en is t de tijd in jaren, met $t = 0$ op 1 januari 2021.

6pt **b** Bereken algebraïsch het tijdstip (jaar en maand) waarop er 60 000 van deze kevers op het eiland zullen zijn volgens dit tweede model.

Opgave 6 – Temperatuurschommeling

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

De dagelijkse schommeling van de lichaamstemperatuur van een gezond persoon wordt gemodelleerd door

$$T = a + b\sin\big(c(t - 8{,}9)\big)$$

In deze formule is T de lichaamstemperatuur in ℃ en is t de tijd in uren, met $t = 0$ om middernacht.

De minimale lichaamstemperatuur is 36,6 ℃, de maximale lichaamstemperatuur is $37{,}2$ ℃.

2pt a Bereken de waarden van a en b.

2pt b Bereken de waarde van c algebraïsch.

5pt c Bereken de tijdstippen waarop de lichaamstemperatuur minimaal respectievelijk maximaal is. Geef uw antwoord in uren en minuten.

Einde van het tentamen.

*Als u klaar bent met het tentamen, controleer dan of **uw naam** en het **opgavenummer** op ieder antwoordblad staat.*
Doe de antwoordbladen in de juiste volgorde in het plastic mapje en doe het blaadje met uw gegevens voorop in dit mapje.

*Wat er **niet** in het mapje moet:*
- lege blaadjes, laat deze s.v.p. op uw tafel liggen;
- blaadjes waar alleen uw naam op staat, neem deze s.v.p. mee;
- kladpapier;
- deze opgaven.

Alleen zo kunnen wij zorgen voor een vlotte correctie van uw tentamenwerk.

Blijf zitten totdat één van de surveillanten uw mapje inneemt (of u bij zich roept).

Formulelijst Wiskunde A

Tweedegraads vergelijkingen

De oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$ en $b^2 - 4ac \geq 0$ zijn $$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ en } x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Differentiëren

Naam van de regel	**Functie**	**Afgeleide**
Somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
Productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotiëntregel	$q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}$
Kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$ ofwel $\dfrac{dk}{dx} = \dfrac{df}{dg} \cdot \dfrac{dg}{dx}$

Logaritmen

Regel	**Voorwaarden**
${}^{g}\log a + {}^{g}\log b = {}^{g}\log ab$	$g > 0,\ \ g \neq 1,\ \ a > 0,\ \ b > 0$
${}^{g}\log a - {}^{g}\log b = {}^{g}\log \dfrac{a}{b}$	$g > 0,\ \ g \neq 1,\ \ a > 0,\ \ b > 0$
${}^{g}\log a^{p} = p \cdot {}^{g}\log a$	$g > 0,\ \ g \neq 1,\ \ a > 0$
${}^{g}\log a = \dfrac{{}^{p}\log a}{{}^{p}\log g}$	$g > 0,\ \ g \neq 1,\ \ a > 0,\ \ p > 0,\ \ p \neq 1$

Rijen

rekenkundige rij:	$Som = \frac{1}{2} \cdot aantal\ termen \cdot (u_e + u_l)$
meetkundige rij:	$Som = \dfrac{u_{l+1} - u_e}{r - 1} \quad (r \neq 1)$
In beide formules geldt:	*e* = rangnummer eerste term; *l* = rangnummer laatste term

Meer formules op de volgende pagina.

Formulelijst wiskunde A (vervolg)

Kansrekening

Voor alle toevalsvariabelen *X* en *Y* geldt: $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
Voor onafhankelijke toevalsvariabelen *X* en *Y* geldt: $\sigma(X+Y) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$-wet:
Bij een serie van *n* onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som *S* en voor het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten *X*:

$E(S) = n \cdot E(X)$ $\quad\quad$ $\sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$

$E(\overline{X}) = E(X)$ $\quad\quad$ $\sigma(\overline{X}) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele *X*, waarbij *n* het aantal experimenten is en *p* de kans op succes per keer, geldt:

$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ met $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

Verwachtingswaarde: $E(X) = np$ $\quad\quad$ Standaardafwijking: $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

n en *p* zijn de parameters van de binomiale verdeling.

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele *X* die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard normaal verdeeld en $P(X < g) = P\left(Z < \frac{g-\mu}{\sigma}\right)$

μ en σ zijn de parameters van de normale verdeling.

Toetsen van hypothesen

Bij een toetsingsprocedure waarbij de toetsingsgrootheid *T* normaal verdeeld is met gemiddelde μ_T en standaardafwijking σ_T zijn de grenswaarden voor het beslissingscriterium:

α	linkszijdig	rechtszijdig	tweezijdig
0,05	$g = \mu_T - 1{,}645\sigma_T$	$g = \mu_T + 1{,}645\sigma_T$	$g_l = \mu_T - 1{,}96\sigma_T$ $g_r = \mu_T + 1{,}96\sigma_T$
0,01	$g = \mu_T - 2{,}33\sigma_T$	$g = \mu_T + 2{,}33\sigma_T$	$g_l = \mu_T - 2{,}58\sigma_T$ $g_r = \mu_T + 2{,}58\sigma_T$

