Uitwerkingen CCVW Wiskunde A 15 december 2025

Vraag 1a - 6 punten

Haakjes wegwerken geeft

$f(x) = x^3 + 5x^2 - 35x - 2x^2 - 10x + 70 = x^3 + 3x^2 - 45x + 70$

Hieruit volgt $f'(x) = 3x^2 + 6x - 45$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow (x+5)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = -5 \vee x = 3$

Alternatief:

De productregel geeft

$f'(x) = 1 \cdot (x^2 + 5x - 35) + (x-2)(2x+5) = x^2 + 5x - 35 + 2x^2 + 5x - 4x - 10 = 3x^2 + 6x - 45$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 45 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 3 \cdot -45}}{2 \cdot 3} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{576}}{6}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-6+24}{6} = \frac{18}{6} = 3$ of $x = \frac{-6-24}{6} = \frac{-30}{6} = -5$

Vraag 1b - 6 punten

$g'(x) = \dfrac{-2 \cdot 2x}{2\sqrt{12 - 2x^2}} = \dfrac{-2x}{\sqrt{12 - 2x^2}}$

$g'(x) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{-2x}{\sqrt{12 - 2x^2}} = 2 \Leftrightarrow -2x = 2\sqrt{12 - 2x^2} \Leftrightarrow -x = \sqrt{12 - 2x^2}$

Kwadrateren geeft $x^2 = 12 - 2x^2 \Leftrightarrow 3x^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$

$g'(2) = \frac{-4}{\sqrt{12-8}} = \frac{-4}{2} = -2$; $g'(-2) = \frac{4}{\sqrt{12-8}} = \frac{4}{2} = 2$

De enige oplossing is dus $x = -2$

Vraag 1c - 4 punten

Er zijn 500 oneven getallen tussen 0 en 1000 en er zijn 50 oneven getallen tussen 0 en 100, dus er zijn 450 oneven getallen tussen 100 en 1000. We moeten zodoende de som berekenen van een rekenkundige rij met 450 termen. Dit geeft:

$Som = \frac{1}{2} \cdot 450 \cdot (eerste\ term + laatste\ term) = \frac{1}{2} \cdot 450 \cdot (101 + 999) = \frac{1}{2} \cdot 450 \cdot 1100 = 247\,500$

Vraag 2a - 7 punten

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{1000 \cdot (16t^2 + 49) - 1000t \cdot 32t}{(16t^2 + 49)^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 0 \Leftrightarrow 1000 \cdot (16t^2 + 49) - 1000t \cdot 32t = 0 \Leftrightarrow 16t^2 + 49 - 32t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -16t^2 + 49 = 0 \Leftrightarrow 16t^2 = 49 \Leftrightarrow t^2 = \frac{49}{16} \Rightarrow t = \frac{7}{4}$$

$t = -\frac{7}{4}$ *is niet mogelijk*

Dit geeft $V = \frac{1000 \cdot \frac{7}{4}}{16 \cdot \frac{49}{16} + 49} = \frac{1750}{98} \approx 17{,}8571$

Er zijn dus maximaal 17 857 bezoekers via de advertenties

Vraag 2b - 6 punten

Op te lossen is $V = 5$

$$\Leftrightarrow \frac{1000t}{16t^2 + 49} = 5 \Leftrightarrow 1000t = 5(16t^2 + 49) \Leftrightarrow 200t = 16t^2 + 49 \Leftrightarrow 16t^2 - 200t + 49 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{200 \pm \sqrt{40000 - 4 \cdot 16 \cdot 49}}{2 \cdot 16} = \frac{200 \pm \sqrt{36864}}{32} = \frac{200 \pm 192}{32}$$

Dit geeft $t = \frac{200+192}{32} = \frac{392}{32} = 12{,}25$ of $t = \frac{200-192}{32} = \frac{8}{32} = 0{,}25$

De campagne wordt dus op $t = 12{,}25$ gestopt

Kan ook met

$$1000t = 5(16t^2 + 49) \Leftrightarrow 1000t = 80t^2 + 245 \Leftrightarrow 80t^2 - 1000t + 245 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1000 \pm \sqrt{1000^2 - 4 \cdot 80 \cdot 245}}{2 \cdot 80} = \frac{1000 \pm \sqrt{921600}}{160} = \frac{1000 \pm 960}{160}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{40}{160} = 0{,}25 \vee t = \frac{1960}{160} = 12{,}25$$

Vraag 3a - 4 punten

Voor de Nederlandse mannen die geboren zijn in 1980 geldt:

$164 = 184 - 20 = \mu - 2\sigma$; $199 = 184 + 15 = \mu + 1\frac{1}{2}\sigma$

$0{,}092$ deel van de populatie ligt tussen de grenzen $\mu - 1\frac{1}{2}\sigma$ en $\mu - \sigma$,

dus tussen de grenzen $\mu + \sigma$ en $\mu + 1\frac{1}{2}\sigma$ ligt ook $0{,}092$ deel van de populatie

Het deel van de populatie tussen de grenzen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 1\frac{1}{2}\sigma$ is zodoende

$0{,}044 + 0{,}092 + 0{,}150 + 0{,}191 + 0{,}341 + 0{,}092 = 0{,}136 + 0{,}341 + 0{,}341 + 0{,}092 = 0{,}91$

Dat is 91% van de populatie

Alternatief:

$164 = 184 - 20 = \mu - 2\sigma$; $199 = 184 + 15 = \mu + 1\frac{1}{2}\sigma$

Het deel van de populatie tussen deze grenzen is gelijk aan het deel van de populatie tussen de grenzen $\mu - 1\frac{1}{2}\sigma$ en $\mu + 2\sigma$

Dat is $1 - 0{,}023 - 0{,}044 - 0{,}023 = 1 - 0{,}09 = 0{,}91$ deel, ofwel 91% van de populatie

Vraag 3b - 4 punten

Voor de Nederlandse mannen die geboren zijn in 1980 geldt:

$164 = 184 - 20 = \mu - 2\sigma$; $199 = 184 + 15 = \mu + 1\frac{1}{2}\sigma$

Voor de Belgische mannen die geboren zijn in 1980 geldt:

$158 = 176 - 18 = \mu - 2\sigma$; $190 = 176 + 14 = \mu + \frac{14}{9}\sigma \approx \mu + 1{,}56\sigma$

De grens van 158 bij de Belgen ligt dus relatief even ver van het gemiddelde als de grens van 164 bij de Nederlanders, maar de grens van 190 bij de Belgen ligt relatief net iets verder van het gemiddelde dan de grens van 199 bij de Nederlanders

Ook:

Het deel van een populatie tussen de grenzen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + \frac{14}{9}\sigma$ is groter dan het deel van een populatie tussen de grenzen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 1\frac{1}{2}\sigma$

Dit betekent dat het percentage van de Belgische mannen die geboren zijn in 1980 met een lengte tussen 158 cm en 190 cm net iets **hoger** is dan het percentage van de Nederlandse mannen die geboren zijn in 1980 met een lengte tussen 164 cm en 199 cm

Vraag 3c - 2 punten

H_0: $\mu = 184$; H_1: $\mu \neq 184$

Vraag 3d - 6 punten

De toetsingsgrootheid G is normaal verdeeld met $\mu_G = 184$ en $\sigma_G = \frac{10}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$

Bij deze tweezijdige toetsingsprocedure met $\alpha = 0{,}05$ is de linker grenswaarde van het kritieke gebied $g_l = \mu_G - 1{,}96\sigma_G = 184 - 1{,}96 \cdot 2 = 180{,}08$

De steekproefuitkomst $180{,}5$ is groter dan deze grenswaarde.

De nulhypothese wordt daarom niet verworpen

Alternatief:

De toetsingsgrootheid G is normaal verdeeld met $\mu_G = 184$ en $\sigma_G = \frac{10}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$

De steekproefuitkomst $180{,}5$ ligt 3,5 cm onder μ_G, dat is $\frac{3{,}5}{2}\sigma_G = 1{,}75\sigma_G$

Bij een tweezijdige toets met $\alpha = 0{,}05$ wordt de nulhypothese verworpen als de steekproefuitkomst meer dan $1{,}96\sigma_G$ van μ_G ligt en dat is hier niet het geval

Vraag 4a - 3 punten

$P(5\ harten) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$

$P(5\ klaveren) = P(5\ ruiten) = P(5\ harten) = \frac{1}{243}$

$P(Yahtzee) = P(5\ harten) + P(5\ klaveren) + P(5\ ruiten) = \frac{3}{243} = \frac{1}{81} \approx 0{,}0123$

Kan ook met

$P(Yahtzee) = P(eerste\ willekeurig;\ tweede, derde, vierde\ en\ vijfde\ gelijk\ aan\ eerste) = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4$

Vraag 4b - 4 punten

$P(hart, hart, hart, klaver, klaver) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$

Er zijn $\binom{5}{3}$ uitkomsten met 3 harten en 2 klaveren in willekeurige volgorde

De kans op 3 harten en 2 klaveren is dus $\binom{5}{3} \cdot \frac{1}{243} = 10 \cdot \frac{1}{243} = \frac{10}{243}$

Vraag 4c - 3 punten

Voor een Full House zijn er 3 mogelijkheden voor het symbool waarvan er 3 zijn
en dan nog 2 mogelijkheden voor het andere symbool
De kans op een Full House is dus $3 \cdot 2 \cdot \frac{10}{243} = \frac{60}{243} = \frac{20}{81} \approx 0{,}2469$

Vraag 4d - 3 punten

$E(uitbetaling) = 10 \cdot P(Yahtzee) + 2 \cdot P(Full\ House) + 0 \cdot P(geen\ prijs)$

$= 10 \cdot \frac{1}{81} + 2 \cdot \frac{20}{81} + 0 = \frac{50}{81} \approx 0{,}6173$

Ook goed zijn: $10 \cdot 0{,}0123 + 2 \cdot 0{,}2469 + 0 = 0{,}6168$ *en* $10 \cdot 0{,}01 + 2 \cdot 0{,}25 + 0 = 0{,}6$

Vraag 5a - 2 punten

$t = 0$ geeft $H = a + b \cdot \sin(0) = a + b \cdot 0 = a$

$a = evenwichtsstand = \dfrac{minimum + maximum}{2} = \dfrac{60 + 10}{2} = 35$

De cabine bevindt zich dus op 35 m hoogte

Je kunt natuurlijk ook eerst vraag b beantwoorden, dan moet hier alleen nog $t = 0$ ingevuld worden.

Vraag 5b - 3 punten

$a = evenwichtsstand = \dfrac{minimum + maximum}{2} = \dfrac{60 + 10}{2} = 35$

$b = amplitude = maximum - a = 60 - 35 = 25$

De periode is $5 \text{ minuten} \times \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2} \text{minuut}$

Dit geeft $c = \frac{2\pi}{periode} = \frac{2\pi}{2\frac{1}{2}} = 2\pi \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{5}\pi \quad (\approx 2{,}5133)$

Vraag 5c - 5 punten

H heeft een beginpunt als $t - \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$

Het eerste maximum is een kwart periode na $t = \frac{1}{3}$

De periode is $\frac{2\pi}{\pi} = 2$

Het eerste maximum is dus op $t = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{5}{6}$

Het tweede maximum is een periode later, dat is op $t = 2\frac{5}{6}$

Alternatief 1:

H is maximaal als $t = d + \frac{1}{4} \cdot periode = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot periode$

De periode is $\frac{2\pi}{\pi} = 2$

Het eerste maximum is dus op $t = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{5}{6}$

Het tweede maximum is een periode later, dat is op $t = 2\frac{5}{6}$

Alternatief 2:

H is maximaal als $\sin\left(\pi\left(t - \frac{1}{3}\right)\right) = 1 \Leftrightarrow \pi\left(t - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\pi$

Dit geeft $t - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

De periode is $\frac{2\pi}{\pi} = 2$

H is dus ook maximaal als $t = \frac{5}{6} + 2 = 2\frac{5}{6}$

Vraag 6a - 5 punten

De groeifactor over drie jaar is $\frac{10000}{1000} = 10$

De groeifactor over één jaar is dan $10^{\frac{1}{3}}$

Het aantal inwoners op tijdstip t (met t in jaren na 1 januari 2022) wordt zodoende gegeven door $1000 \cdot 10^{\frac{t}{3}}$

Het aantal inwoners op 1 januari 2023 is $1000 \cdot 10^{\frac{1}{3}} \approx 2154$

Het aantal inwoners op 1 januari 2024 is $1000 \cdot 10^{\frac{2}{3}} \approx 4642$

Vraag 6b - 6 punten

$N = 60\,000 \Leftrightarrow \dfrac{250\,000}{4 + 21\mathrm{e}^{-t}} = 60\,000 \Leftrightarrow 250\,000 = 60\,000(4 + 21\mathrm{e}^{-t}) \Leftrightarrow 4 + 21\mathrm{e}^{-t} = \dfrac{250\,000}{60\,000}$

$\Leftrightarrow 4 + 21\mathrm{e}^{-t} = \frac{25}{6} \Leftrightarrow 21\mathrm{e}^{-t} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-t} = \frac{1}{126} \approx 0{,}0079365$

Dit geeft $-t = \ln\left(\frac{1}{126}\right) \Leftrightarrow t = -\ln\left(\frac{1}{126}\right) \approx 4{,}836$

4 jaar en $0{,}836 \times 12 \approx 10{,}03$ maanden na 1 januari 2025 is in november 2029

Kan ook met:

4 jaar en $0{,}836 \times 365 \approx 305$ dagen na 1 januari 2025 is in november 2029

Vraag 6c - 2 punten

Als t groot wordt, wordt e^{-t} vrijwel 0

Dit geeft $N = \dfrac{250\,000}{4+21\cdot 0} = \dfrac{250\,000}{4} = 62\,500$

