CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

Tentamen Wiskunde A

Datum:	17 december 2021
Tijd:	13.30 – 16.30 uur
Aantal opgaven:	6

Lees onderstaande aanwijzingen s.v.p. goed door voordat u met het tentamen begint. Als u zich niet aan deze aanwijzingen houdt, kan dit tot aftrek van punten leiden.

Zet uw naam op alle in te leveren antwoordbladen.

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad.

Laat bij elke vraag door middel van een redenering, een berekening, of een toelichting op het gebruik van de rekenmachine zien hoe het antwoord is verkregen. Zonder redenering of berekening worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend (*zie ook opgave 1*).

Schrijf leesbaar en met inkt. Gebruik geen correctievloeistof zoals tipp-ex. Gebruik van een potlood is alleen toegestaan bij het tekenen van grafieken.

Bij het tentamen kunt u gebruik maken van een eenvoudige wetenschappelijke rekenmachine. **Overige hulpmiddelen, zoals een grafische rekenmachine, een rekenmachine met de mogelijkheid om integralen te berekenen, een formulekaart, BINAS of een tabellenboek, zijn NIET toegestaan**.

Op de laatste twee bladzijden van dit tentamen is een lijst met formules afgedrukt.

Het gebruik van een mobiele telefoon of andere telecommunicatieapparatuur tijdens het tentamen is verboden. Zet uw **mobiele telefoon uit** en stop deze in uw tas.

Te behalen punten per onderdeel:

Opgave	1	2	3	4	5	6
a	5	4	4	5	4	2
b	6	5	2	5	5	2
c	4	5	4	5	5	4
d			2		3	
Totaal	15	14	12	15	17	8

Cijfer $= \dfrac{\text{behaald aantal punten}}{9} + 1$

U bent geslaagd als uw cijfer 5,5 of hoger is.

Opgave 1 – Algebraïsche vaardigheden

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

*Bij het **algebraïsch** uitwerken van opgaven moet de berekening volledig op papier worden gegeven. Het aflezen van functiewaarden uit een al dan niet met een rekenmachine gemaakte tabel is geen algebraïsche berekening. De rekenmachine mag wel gebruikt worden voor eenvoudige berekeningen en voor het benaderen van getallen zoals* $\sqrt{2}$ *en* $\log(3)$.
Tenzij anders vermeld, dienen alle berekeningen in dit tentamen algebraïsch te worden uitgewerkt.

De functie f wordt gegeven door $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.
De lijn ℓ wordt gegeven door de vergelijking $y = -\frac{9}{4}x + 4$.

5pt a Bereken algebraïsch de coördinaten van de gemeenschappelijke punten van de grafiek van f en de lijn ℓ.

De functie g wordt gegeven door $g(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$.

6pt b Bereken algebraïsch de waarde(n) van x waarvoor $g'(x) = \frac{4}{3}$.

Het verband tussen de grootheden *D* en *P* wordt gegeven door de formule

$$D = 3 + 2\mathrm{e}^{P-1}$$

Deze formule kan worden omgewerkt tot een formule van de vorm

$$P = a + \ln(D - b)$$

4pt c Bereken algebraïsch de waarden van a en b in de omgewerkte formule.

Opgave 2 – Corona-informatie van de overheid

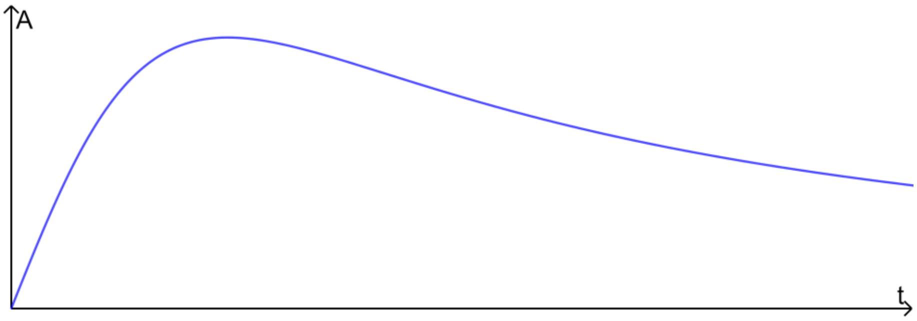
Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Ook in land L houdt de regering regelmatig persconferenties over de coronamaatregelen. De details van deze maatregelen worden direct na de persconferentie gepubliceerd op een speciale website. Het aantal bezoekers van deze website wordt benaderd door de formule

$$A = \frac{5000t}{16 + t^2}$$

In deze formule is A het aantal bezoekers dat is ingelogd op de website in duizenden en is t de tijd in minuten, met $t = 0$ op het moment dat de website online gaat.

In de figuur hieronder ziet u de grafiek die het verband tussen A en t weergeeft.



Als er meer dan 500 000 bezoekers ingelogd zijn, is de website overbelast. Men kan dan nog wel inloggen, maar het duurt lang voordat de gevraagde informatie wordt getoond.

4pt **a** Bereken algebraïsch het aantal minuten gedurende welke de website volgens bovenstaande formule overbelast is.

5pt **b** Bereken algebraïsch het maximale aantal ingelogde bezoekers van de website volgens bovenstaande formule.

Het aantal ingelogde bezoekers kan ook worden gemodelleerd met de formule

$$B = t \cdot \mathrm{e}^{-0{,}25t + 6{,}05}$$

In deze formule is B het aantal bezoekers dat is ingelogd op de website in duizenden en is t weer de tijd in minuten, met $t = 0$ op het moment dat de website online gaat.

5pt **c** Gebruik de afgeleide $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$ om te onderzoeken of volgens deze tweede formule op $t = 5$ het aantal ingelogde bezoekers nog toeneemt.

Opgave 3 – Steenuilen in de Achterhoek en in de Liemers

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

De steenuil is een kleine bruingrijze gedrongen uil van ongeveer 21 tot 27 cm lang en is op de dwerguil na, de kleinste uil die voorkomt in Nederland. De steenuil broedt maar één keer per jaar van eind maart tot in juni.
Een broedpoging heet succesvol als er minstens één jong wordt geboren.
Uit een onderzoek in de Achterhoek, een regio in het oosten van de provincie Gelderland, blijkt dat de kans op een succesvolle broedpoging in die regio gelijk is aan $\frac{3}{4}$.

Eén op de 10 steenuil paren doet na een mislukte broedpoging een tweede broedpoging maar geen enkel paar doet een derde poging.

4pt **a** Bereken het verwachte aantal paren met een succesvolle broedpoging bij een populatie van 284 steenuil paren in de Achterhoek.

De Liemers is een regio in Gelderland net ten zuidwesten van de Achterhoek. Men wil toetsen of de kans op een succesvolle broedpoging in deze regio ook $\frac{3}{4}$ is.
Men neemt daarbij een onbetrouwbaarheidsdrempel van $\alpha = 0{,}05$.

2pt **b** Formuleer de nulhypothese en de alternatieve hypothese voor deze toetsingsprocedure.

In de Liemers worden 100 willekeurig gekozen broedpogingen onderzocht.

4pt **c** Bereken de kans dat precies 70 van deze 100 broedpogingen succesvol zijn als de kans op succes in deze regio ook $\frac{3}{4}$ is.

2pt **d** Kunt u op grond van uw antwoord van vraag c een conclusie trekken voor deze toetsingsprocedure?
Zo ja, formuleer en motiveer deze conclusie, zo nee, leg uit waarom niet.

Opgave 4 – Steenuilen in heel Nederland

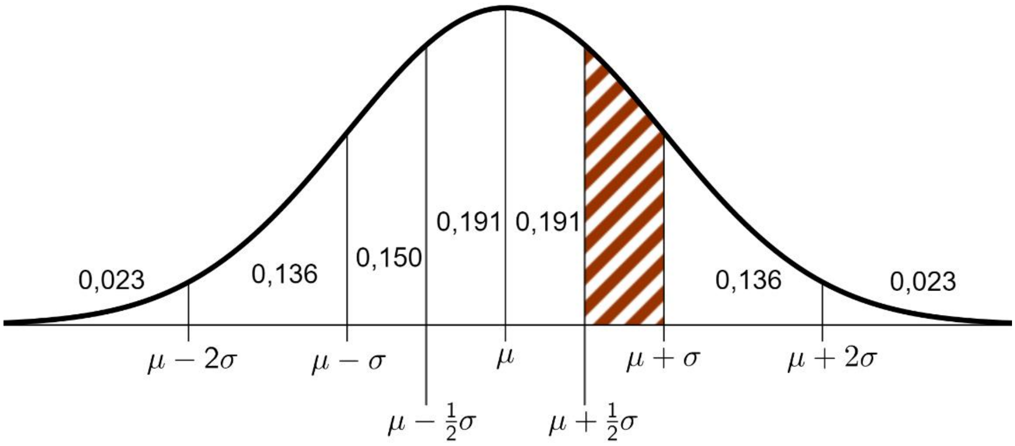
Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

In 2018 is op basis van uitgebreide tellingen in heel Nederland vastgesteld dat het percentage succesvolle broedsels per populatie steenuilen normaal verdeeld was. In 2,5% van de populaties was dit percentage minder dan 62,6. In 97,5% van de populaties was dit percentage minder dan 69.

5pt **a** Bereken met behulp van de vuistregels de kans dat het percentage succesvolle broedsels in een populatie kleiner was dan 64,2.

De gewichten van zowel mannetjes- als vrouwtjessteenuilen zijn normaal verdeeld. Mannetjes wegen gemiddeld 180 gram met een standaardafwijking van 6 gram, vrouwtjes wegen gemiddeld 200 gram met een standaardafwijking van 8 gram.

5pt **b** Bereken met behulp van de figuur hieronder de kans dat een broedpaar een gewicht heeft tussen 385 en 400 gram.



Een normale kansverdeling X. De oppervlakte van het gearceerde vlakdeel komt overeen met $P\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma < X < \mu + \sigma\right) = 0{,}150$

Nadat een jong uit het ei gekropen is, blijft het nog ruim een maand in het nest totdat het uitvliegt. Daarbij heeft een jong iedere dag een kans van 0,99 om te overleven tot de volgende dag.
Bij een broedpaar zijn op dezelfde dag twee jongen uit het ei gekropen.

5pt **c** Bereken de kans dat precies één van deze twee jongen 30 dagen later nog leeft.

Opgave 5 – Fietshelmen

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Ook in land L wordt gewerkt aan de verbetering van de verkeersveiligheid.
Eén van de maatregelen die daarbij genomen wordt is het verplicht dragen van een helm voor fietsers. Na het afkondigen van deze helmplicht neemt het percentage fietsers dat een helm draagt flink toe. Op de dag dat de maatregel afgekondigd wordt draagt 4% van de fietsers een helm, twee weken later draagt 9% van de fietsers een helm.

4pt **a** Bereken algebraïsch hoe lang na de afkondiging van de helmplicht 50% van de fietsers een helm draagt als dit percentage **lineair** toeneemt. Geef uw antwoord in dagen nauwkeurig.

5pt **b** Bereken algebraïsch hoe lang na de afkondiging van de helmplicht 50% van de fietsers een helm draagt als dit percentage **exponentieel** toeneemt. Geef uw antwoord weer in dagen nauwkeurig.

Na verloop van tijd zal het percentage fietsers dat een helm draagt niet meer lineair of exponentieel toenemen. Een formule waarmee dit goed gemodelleerd wordt, is

$$p = \frac{180}{2 + 43 \cdot 2^{-t}}$$

In deze formule is p het percentage fietsers dat een helm draagt en is t de tijd in weken, met $t = 0$ op het moment dat de maatregel afgekondigd wordt.

5pt **c** Bereken algebraïsch het tijdstip waarop volgens deze formule 50% van de fietsers een helm draagt.

3pt **d** Zullen volgens deze formule op de lange duur alle fietsers in land L een helm dragen? Zo ja, leg uit waarom. Zo nee, hoeveel procent van de fietsers zal volgens deze formule op de lange duur geen helm dragen?

Opgave 6 – De haven van Herm

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Herm is één van de kleinere Kanaaleilanden, dat voornamelijk bezocht wordt door dagtoeristen die met een ferry vanaf het nabijgelegen Guernsey komen.
De waterstand in de haven van Herm is uiteraard afhankelijk van het tij. Voor een zekere dag wordt deze waterstand gegeven door de formule

$$H = 4 + 3{,}5\,sin\left(\frac{1}{2}t\right)$$

In deze formule is t de tijd in uren met $t = 0$ om middernacht en is H de waterstand in meters.

2pt a Wat is de minimale en de maximale waterstand in de haven van Herm op deze dag?

De periode van H is, afgerond op hele minuten, gelijk aan 754.

2pt b Laat dit met een berekening zien.

Als de waterstand in de haven minder dan 1,5 meter is, kunnen de ferry's niet aanleggen in de haven. Ze wijken dan uit naar een aanlegsteiger aan de kust.
Op bovengenoemde dag daalt de waterstand om 7:52 uur (8 minuten voor 8) voor het eerst onder de 1,5 meter.

4pt c Bereken het eerste tijdstip na 7:52 uur waarop de ferry's weer kunnen aanleggen in de haven omdat de waterstand weer boven de 1,5 meter stijgt.

Einde van het tentamen.

*Als u klaar bent met het tentamen, controleer dan of **uw naam** en het **opgavenummer** op ieder antwoordblad staat.*
Doe de antwoordbladen in de juiste volgorde in het plastic mapje en doe het blaadje met uw gegevens voorop in dit mapje.

*Wat er **niet** in het mapje moet:*
- lege blaadjes, laat deze s.v.p. op uw tafel liggen;
- blaadjes waar alleen uw naam op staat, neem deze s.v.p. mee;
- kladpapier;
- deze opgaven.

Alleen zo kunnen wij zorgen voor een vlotte correctie van uw tentamenwerk.

Blijf zitten totdat één van de surveillanten uw mapje inneemt (of u bij zich roept).

Formulelijst Wiskunde A

Tweedegraads vergelijkingen

De oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$ en $b^2 - 4ac \geq 0$ zijn $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ en $x = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Differentiëren

Naam van de regel	**Functie**	**Afgeleide**
Somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
Productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotiëntregel	$q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$
Kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$ ofwel $\dfrac{dk}{dx} = \dfrac{df}{dg} \cdot \dfrac{dg}{dx}$

Logaritmen

Regel	**Voorwaarden**
${}^{g}\log a + {}^{g}\log b = {}^{g}\log ab$	$g > 0,\ \ g \neq 1,\ \ a > 0,\ \ b > 0$
${}^{g}\log a - {}^{g}\log b = {}^{g}\log \dfrac{a}{b}$	$g > 0,\ \ g \neq 1,\ \ a > 0,\ \ b > 0$
${}^{g}\log a^p = p \cdot {}^{g}\log a$	$g > 0,\ \ g \neq 1,\ \ a > 0$
${}^{g}\log a = \dfrac{{}^{p}\log a}{{}^{p}\log g}$	$g > 0,\ \ g \neq 1,\ \ a > 0,\ \ p > 0,\ \ p \neq 1$

Rijen

rekenkundige rij:	$Som = \frac{1}{2} \cdot aantal\ termen \cdot (u_e + u_l)$
meetkundige rij:	$Som = \dfrac{u_{l+1} - u_e}{r - 1}$ $(r \neq 1)$
In beide formules geldt:	*e* = rangnummer eerste term; *l* = rangnummer laatste term

Meer formules op de volgende pagina.

Formulelijst wiskunde A (vervolg)

Kansrekening

Voor alle toevalsvariabelen *X* en *Y* geldt: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
Voor onafhankelijke toevalsvariabelen *X* en *Y* geldt: $\sigma(X+Y)=\sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$-wet:
Bij een serie van *n* onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som *S* en voor het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten *X*:

$E(S)=n\cdot E(X)$ $\qquad$ $\sigma(S)=\sqrt{n}\cdot\sigma(X)$

$E(\overline{X})=E(X)$ $\qquad$ $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele *X*, waarbij *n* het aantal experimenten is en *p* de kans op succes per keer, geldt:

$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ met $k=0,1,2,\ldots,n$

Verwachtingswaarde: $E(X)=np$ $\qquad$ Standaardafwijking: $\sigma(X)=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$

n en *p* zijn de parameters van de binomiale verdeling.

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele *X* die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard normaal verdeeld en $P(X<g)=P\left(Z<\frac{g-\mu}{\sigma}\right)$

μ en σ zijn de parameters van de normale verdeling.

Toetsen van hypothesen

Bij een toetsingsprocedure waarbij de toetsingsgrootheid *T* normaal verdeeld is met gemiddelde μ_T en standaardafwijking σ_T zijn de grenswaarden voor het beslissingscriterium:

α	linkszijdig	rechtszijdig	tweezijdig
0,05	$g=\mu_T-1{,}645\sigma_T$	$g=\mu_T+1{,}645\sigma_T$	$g_l=\mu_T-1{,}96\sigma_T$
			$g_r=\mu_T+1{,}96\sigma_T$
0,01	$g=\mu_T-2{,}33\sigma_T$	$g=\mu_T+2{,}33\sigma_T$	$g_l=\mu_T-2{,}58\sigma_T$
			$g_r=\mu_T+2{,}58\sigma_T$

