Uitwerkingen voorbeeldtentamen 2 Wiskunde A 2018

Vraag 1a - 4 punten

$9x^3 + 3x^2 = 2x \Leftrightarrow 9x^3 + 3x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(9x^2 + 3x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 9x^2 + 3x - 2 = 0$

$9x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow (3x + 2)(3x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \vee x = \frac{1}{3}$

Mag uiteraard ook met de abc-formule: $x = \frac{-3 \pm \sqrt{81}}{18} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \vee x = \frac{1}{3}$

Oplossingen: $x = 0,\ x = -\frac{2}{3},\ x = \frac{1}{3}$

Vraag 1b - 4 punten

$3 \cdot 5^x + 14 = 10 \cdot 5^x \Leftrightarrow 7 \cdot 5^x = 14 \Leftrightarrow 5^x = 2 \Leftrightarrow x = {}^5\log(2) \approx 0{,}431$

Vraag 1c - 4 punten

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x + 2) - x^2 \cdot 1}{(x + 2)^2} = \frac{x^2 + 4x}{(x + 2)^2}$$

$$\text{Helling} = f'(1) = \frac{1 + 4}{3^2} = \frac{5}{9}$$

Vraag 1d - 5 punten

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x^2}{x + 2} = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = (x + 2)\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{4}x^2 + x - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Snijpunt (2,1)

Vraag 2a - 4 punten

${}^{\mathrm{d}R}/_{\mathrm{d}Q} = 1 \cdot \left(20 - \tfrac{1}{5}Q\right) + Q \cdot \left(-\tfrac{1}{5}\right)$ of $R = 20Q - \frac{1}{5}Q^2$

Uit beide volgt ${}^{\mathrm{d}R}/_{\mathrm{d}Q} = 20 - \frac{2}{5}Q$

${}^{\mathrm{d}R}/_{\mathrm{d}Q} = 0 \Leftrightarrow 20 - \frac{2}{5}Q = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{5}Q = 20$

Dit geeft $Q = 20 \cdot \frac{5}{2} = 50$

Vraag 2b - 4 punten

Eerst $P = 12$ invullen in $P = 20 - \frac{1}{5}Q$

Dit geeft $12 = 20 - \frac{1}{5}Q \Leftrightarrow \frac{1}{5}Q = 8 \Leftrightarrow Q = 40$

$Q = 40$ invullen in $Q = \sqrt{5I - 10}$ geeft dan $5I - 10 = 40^2$

Hieruit volgt $5I = 1600 - 10 = 1590 \Leftrightarrow I = 318$

Alternatief:

$Q = \sqrt{5I - 10}$ substitueren in $P = 20 - \frac{1}{5}Q$ geeft $P = 20 - \frac{1}{5}\sqrt{5I - 10}$

$P = 12$ geeft dan $12 = 20 - \frac{1}{5}\sqrt{5I - 10} \Leftrightarrow \sqrt{5I - 10} = 40$

Hieruit volgt $5I - 10 = 40^2 \Leftrightarrow 5I = 1600 - 10 = 1590 \Leftrightarrow I = 318$

Vraag 2c - 4 punten

$W = R - I = Q\left(20 - \frac{1}{5}Q\right) - I$

... $= \sqrt{5I - 10}\left(20 - \sqrt{5I - 10}\right) - I \quad of \quad 20Q - \frac{1}{5}Q^2 - I$

... $= 20\sqrt{5I - 10} - \frac{1}{5}(5I - 10) - I$

... $= 20\sqrt{5I - 10} - I + 2 - I = 2 - 2I + 20\sqrt{5I - 10}$

Vraag 2d - 6 punten

${}^{\mathrm{d}W}/_{\mathrm{d}I} = -2 + 20 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{5I - 10}} \cdot 5 = -2 + \dfrac{50}{\sqrt{5I - 10}}$

${}^{\mathrm{d}W}/_{\mathrm{d}I} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{50}{\sqrt{5I - 10}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{5I - 10} = \dfrac{50}{2} \Leftrightarrow 5I - 10 = 25^2 \Leftrightarrow 5I = 635 \Leftrightarrow I = 127$

Dit geeft $W_{max} = 2 - 254 + 20\sqrt{625} = -252 + 500 = 248$ euro

Vraag 3a - 4 punten

$\mu_T = \mu_G + \mu_F = 1130{,}5 + 90{,}5 = 1221{,}0$ g

$\sigma_T^2 = \sigma_G^2 + \sigma_F^2 = 25^2 + 3^2 = 634$, dus $\sigma_T = \sqrt{634} \approx 25{,}18$ g

Vraag 3b - 2 punten

H_0: $\mu = 1040$; H_1: $\mu \neq 1040$

Vraag 3c - 3 punten

De toetsingsgrootheid *T* is normaal verdeeld met $\mu_T = 1040$ en $\sigma_T = \frac{23}{\sqrt{100}} = 2{,}3$

Vraag 3d - 3 punten

Dit is een tweezijdige toets, dus moet de overschrijdingskans vergeleken worden met $\frac{1}{2}\alpha = 0{,}025$.

$0{,}041 > 0{,}025$, dus de nulhypothese moet niet verworpen worden.

Er is niet voldoende reden om aan te nemen dat de inhoud van de flessen niet gelijk is aan 1040 ml.

Vraag 4a - 5 punten

Aflezen: maximum 4,8; minimum 0,4; evenwichtsstand 2,6

Twee van de drie moeten afgelezen worden.

$A = evenwichtsstand = 2{,}6$

$B = amplitude = 2{,}2$

De periode is 12,5 uur, dus $C = \frac{2\pi}{12{,}5} = \frac{4}{25}\pi = 0{,}16\pi \approx 0{,}503$

Vraag 4b - 4 punten

De periode is 12,5 uur, dus om 12.30 uur is de diepte van de haven ook 1,54 m.
Middernacht in de nacht van 1 op 2 augustus ligt 1 uur voordat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat. De andere tijdstippen waarop de diepte ook 1,54 m is, liggen dus 1 uur nadat de grafiek dalend door de evenwichtsstand gaat. De tijd tussen stijgend en dalend door de evenwichtsstand is een halve periode.

Eerste tijdstip: 1 uur ($t = 25$) + $6\frac{1}{4}$ uur (halve periode) + 1 uur = 8.15 uur

Laatste tijdstip: 12,5 uur na 8.15 = 20.45 uur

Je kunt het antwoord ook vinden door de vergelijking $D(t) = 1{,}54$ *op te lossen en na te gaan welke van de oplossingen aan de omschrijving voldoen. Dit valt echter buiten de leerstof wiskunde A.*

Vraag 5a - 4 punten

Bij lineaire groei is de toename per tijdseenheid constant.
De toename over de eerste twee dagen is 45, de toename over de tweede twee dagen is 720
Er is dus geen sprake van lineaire groei.

Vraag 5b - 4 punten

De groeifactor over de eerste twee dagen is $\frac{48}{3} = 16$, de groeifactor over de tweede twee dagen is ook 16, dus past een exponentieel groeimodel
De groeifactor over één dag is $16^{\frac{1}{2}} = 4$
Het aantal dragers op dag 3 wordt dus gegeven door $3 \cdot 4^3 = 48 \cdot 4 = 192$

Vraag 5c - 4 punten

$N'(t) = 5000 \cdot (-4\mathrm{e}^{-0{,}085t}) \cdot (-0{,}085) = 170 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}085t}$
$N'(4) = 170 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}085 \cdot 4} = 121$ dragers per dag

Vraag 5d - 5 punten

$N(t) = 10\,000 \Leftrightarrow 5000 \cdot (3 - 4 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}085t}) = 10\,000 \Leftrightarrow 3 - 4 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}085t} = 2 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0{,}085t} = 0{,}25$
Dit geeft $-0{,}085t = \ln(0{,}25) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(0{,}25)}{-0{,}085}$ =16,31 dagen = 16 dagen en 7 uur.

Vraag 5e - 3 punten

Op den duur wordt de term $\mathrm{e}^{-0{,}085t}$ vrijwel 0.
Het aantal dragers wordt dus 15 000.
Er zijn zodoende op den duur 5000 niet dragers.

Vraag 6a - 3 punten

X, het aantal huurders dat verschijnt, is binomiaal verdeeld met $n = 20$ en $p = 0{,}9$

$P(X = 18) = \binom{20}{18} \cdot 0{,}9^{18} \cdot 0{,}1^2 = 0{,}2852$

Vraag 6b - 3 punten

$P(X = 19) = \binom{20}{19} \cdot 0{,}9^{19} \cdot 0{,}1 = 0{,}27017$

$P(X = 20) = 0{,}9^{20} = 0{,}12158$

Vraag 6c - 5 punten

De verwachte netto inkomsten als hij 20 bungalows verhuurt zijn

$40\,000 - 4000 \cdot 0{,}2702 - 8000 \cdot 0{,}1216 = 37\,946{,}40$ euro

De inkomsten als hij 18 bungalows verhuurt zijn $18 \cdot 2000 = 36\,000$ euro

De verwachte inkomsten zijn hoger als hij 20 bungalows verhuurt.

Vraag 6d - 3 punten

$19 \cdot 2000 - 4000 \cdot P(alle\ 19\ verschijnen) = 38\,000 - 4000 \cdot 0{,}9^{19} = 37\,459{,}66$ euro

Extra vraag a - 5 punten

$\mu_X = 10 \cdot 5 + 4 \cdot 15 = 110$ minuten

$\sigma_X^2 = 10 \cdot 1^2 + 4 \cdot 3^2$, dus $\sigma_X = \sqrt{10 \cdot 1^2 + 4 \cdot 3^2} = \sqrt{46}$ $(\approx 6{,}782)$

Extra vraag b - 3 punten

6 minuten = $\mu + \sigma$, 4 minuten = $\mu - \sigma$

68% van de kandidaten heeft volgens de vuistregels tussen de 4 en 6 minuten nodig voor een meerkeuzevraag, dus 32% heeft minder dan 4 of meer dan 6 minuten nodig.

Vanwege de symmetrie heeft de helft hiervan, dat is 16%, meer dan 6 minuten nodig.

Extra vraag c - 2 punten

H_0: $p = 0{,}8$; H_1: $p < 0{,}8$

Extra vraag d - 6 punten

De toetsingsgrootheid *T* is het aantal geslaagden in de steekproef.

T is binomiaal verdeeld met $n = 50$ en $p = 0{,}8$

Dit geeft $\mu_T = np = 50 \cdot 0{,}8 = 40$ en $\sigma_T = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{50 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2} = \sqrt{8}$

De grens van het verwerpingsgebied is dus $g = \mu_T - 1{,}645\sigma_T = 40 - 1{,}645 \cdot \sqrt{8} = 35{,}3$

De steekproefuitkomst is groter dan deze grenswaarde, dus de nulhypothese wordt niet verworpen

Ofwel: het tentamen is niet moeilijker dan vorig jaar.