

CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

Tentamen Wiskunde A

Datum: 15 december 2020

Tijd: 140 minuten (2 uur en 20 minuten) (dit tentamen duurt korter dan 3 uur wegens Corona beperkingen)

Aantal opgaven: 6 **Lees onderstaande aanwijzingen s.v.p. goed door voordat u met het tentamen begint. Als u zich niet aan deze aanwijzingen houdt, kan dit tot aftrek van punten leiden.**

Zet uw naam op alle in te leveren antwoordbladen.

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad.

Laat bij elke vraag door middel van een redenering, een berekening, of een toelichting op het gebruik van de rekenmachine zien hoe het antwoord is verkregen. Zonder redenering of berekening worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend (*zie ook opgave 1*).

Schrijf leesbaar en met inkt. Gebruik geen correctievloeistof zoals tipp-ex.

Gebruik van een potlood is alleen toegestaan bij het tekenen van grafieken.

Bij het tentamen kunt u gebruik maken van een eenvoudige wetenschappelijke rekenmachine. **Overige hulpmiddelen, zoals een grafische rekenmachine, een rekenmachine met de mogelijkheid om integralen te berekenen, een formulekaart, BINAS of een tabellenboek, zijn NIET toegestaan.**

Op de laatste twee bladzijden van dit tentamen is een lijst met formules afgedrukt.

Het gebruik van een mobiele telefoon of andere telecommunicatieapparatuur tijdens het tentamen is verboden. Zet uw **mobiele telefoon uit** en stop deze in uw tas.

Omdat de tijd voor dit tentamen teruggebracht is tot 140 minuten (normaal 180), is het aantal vragen per opgave ook teruggebracht. Daardoor is het totale aantal punten dat behaald kan worden teruggebracht tot 70 (normaal 90).

Te behalen punten per onderdeel:

Opgave	1	2	3	4	5	6
a	4	2	4	3	2	5
b	5	5	4	3	3	5
c	5	4		5	2	
d	4			5		
Totaal	18	11	8	16	7	10

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{behaald aantal punten}}{10} \times \frac{9}{7} + 1$$

U bent geslaagd als uw cijfer 5,5 of hoger is.

Opgave 1 – Algebraïsche vaardigheden

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Bij het **algebraïsch** uitwerken van opgaven moet de berekening volledig op papier worden gegeven. Het aflezen van functiewaarden uit een al dan niet met een rekenmachine gemaakte tabel is geen algebraïsche berekening. De rekenmachine mag wel gebruikt worden voor eenvoudige berekeningen en voor het benaderen van getallen zoals $\sqrt{2}$ en $\log(3)$.

Tenzij anders vermeld, dienen alle berekeningen in dit tentamen algebraïsch te worden uitgewerkt.

De functie f wordt gegeven door $f(x) = x^3 - 3x^2$.

De lijn ℓ wordt gegeven door de vergelijking $y = 4x$.

- 4pt a Bereken algebraïsch de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met lijn ℓ .
- 5pt b Bereken algebraïsch de waarden van a waarvoor de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(a, f(a))$ evenwijdig is aan lijn ℓ . Geef uw antwoorden afgerond op twee cijfers achter de komma.

De functie g wordt gegeven door $g(x) = \frac{3x^2 + 12}{2x}$.

- 5pt c Bereken algebraïsch de waarden van a waarvoor de raaklijn aan de grafiek van g in het punt $(a, g(a))$ horizontaal loopt.

De functie h wordt gegeven door $h(x) = x^2 \cdot e^{-x}$.

Punt P is het snijpunt van de grafiek van h met de verticale lijn met vergelijking $x = 1$.

- 4pt d Bereken algebraïsch de helling van de grafiek van h in punt P .

Opgave 2 – Winst (of niet)

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

De winst op een product is het verschil tussen de opbrengsten en de kosten. Voor een zeker product worden de kosten per eenheid C voor de productie Q gegeven door de formule

$$C = 3 + \frac{11}{Q}$$

In deze formule is C in duizenden euro's en is Q gewicht van het product in tonnen (1 ton = 1000 kg, dus Q hoeft geen geheel getal te zijn). Dit product wordt op bestelling geproduceerd, dus de gehele productie wordt verkocht.

De totale opbrengst van de verkoop van dit artikel wordt gegeven door

$$R = 4 + 10\sqrt{Q}$$

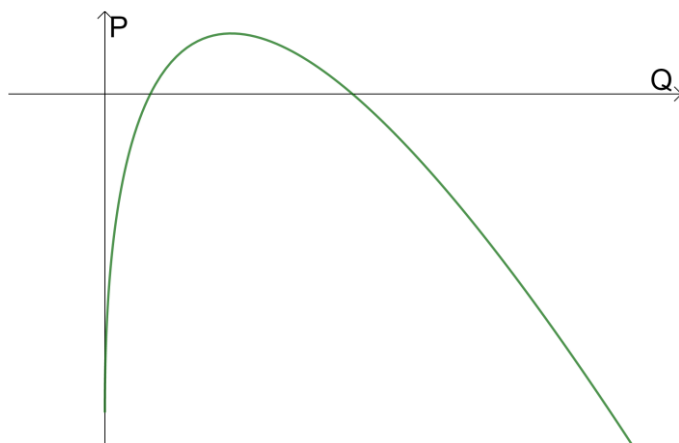
met R in duizenden euro's.

De totale winst op dit product wordt zodoende gegeven door

$$P = -3Q + 10\sqrt{Q} - 7$$

- 2pt a Laat zien hoe deze laatste formule afgeleid wordt uit de hierboven gegeven formules voor C en R .

In de figuur hieronder ziet u de grafiek die bij de formule van P hoort.



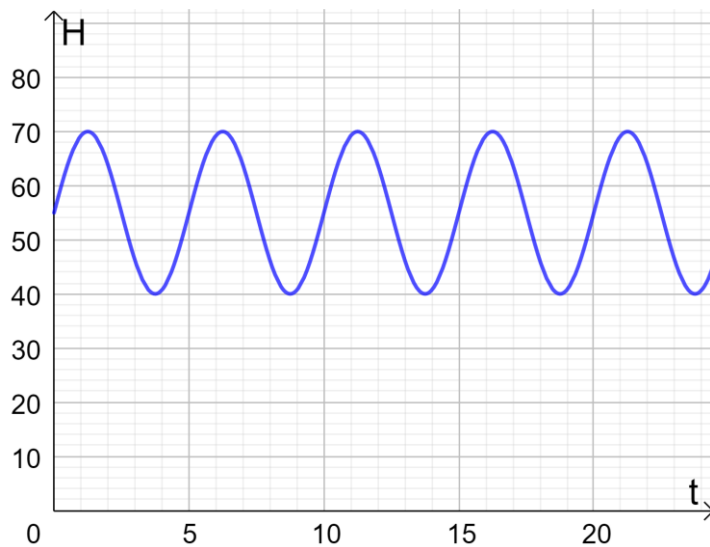
- 5pt b Bereken algebraïsch de waarden van Q waarvoor de winst positief is.
- 4pt c Bereken algebraïsch de waarde van Q waarvoor P maximaal is.

Opgave 3 – Een windmolen

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Boer Bert heeft een windmolen op zijn land staan. Op één van de wieken van deze windmolen is een sensor gemonteerd, die onder meer de windsnelheid meet.

Op een gunstige dag waait de wind constant en draaien de wieken van deze molen met een constante snelheid. In de figuur hieronder ziet u de grafiek die het verband geeft tussen H , de hoogte van de sensor boven de grond in meters, en t , de tijd in seconden.



Bij deze figuur past een formule van de vorm $H = A + B \sin(Ct)$.

4pt a Gebruik de figuur om A , B en C te bepalen.

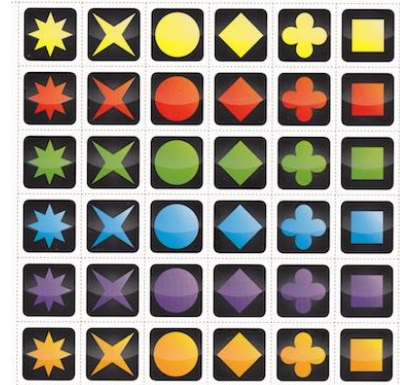
Op $t = 0,58$ seconde is de sensor op een hoogte van 64,99 meter boven de grond.

4pt b Bereken algebraïsch de eerstvolgende drie tijdstippen waarop de sensor op een hoogte van 64,99 meter boven de grond is.

Opgave 4 – Qwirkle

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Qwirkle is een strategisch gezelschapsspel dat gespeeld kan worden met 2 tot 6 personen. Het spelmateriaal bestaat uit vierkante houten blokjes, met daarop afbeeldingen van 6 figuren (klaver, vierpuntige ster, achtpuntige ster, vierkant, cirkel en ruit) in 6 kleuren (geel, rood, groen, blauw, paars en oranje). Het spel wordt gespeeld met 3 sets van de 36 blokjes in de figuur hiernaast, in totaal zijn er dus 108 blokjes. Bij het begin van het spel worden alle 108 blokjes in een zakje gedaan en pakt iedere speler blindelings 6 blokjes uit deze zak.



(Bron: Wikipedia)

Sietse en Hielke spelen dit spel een aantal keer. Bij de start van het eerste spel zijn drie van de blokjes die Sietse gepakt heeft identiek (zelfde figuur en kleur) en zijn de andere drie allemaal uniek (verschillende figuren of kleuren).

- 3pt a Bereken het aantal verschillende manieren waarop Sietse zijn blokjes in een rij kan leggen.

Bij de start van het tweede spel is het eerste blokje dat Hielke uit de zak pakt groen.

- 3pt b Bereken de kans het tweede blokje dat Hielke uit de zak pakt ook groen is.

De blokjes worden machinaal geproduceerd en het gewicht van de blokjes is normaal verdeeld met gemiddelde $\mu = 5,8$ g en standaardafwijking $\sigma = 0,3$ g. Wat betreft het gewicht kunnen de 108 blokjes in één spel beschouwd worden als een willekeurige steekproef uit deze productie.

- 5pt c Bereken hoeveel van de blokjes in een spel van 108 blokjes volgens de vuistregels van de normale verdeling een gewicht zullen hebben dat tussen 5,2 g en 6,1 g ligt.

- 5pt d Bereken de kans dat 4 van de 6 blokjes die Sietse aan het begin van een spel uit de zak pakt meer dan 5,8 g wegen.

Opgave 5 – Qwirkle blokjes

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Bij een kwaliteitscontrole van de machine die de Qwirkle blokjes produceert, wordt getoetst of het gemiddelde gewicht van de blokjes nog steeds 5,8 g is. Hiervoor wordt het gewicht van 25 door deze machine geproduceerde blokjes gemeten. In deze toetsingsprocedure wordt aangenomen dat de standaardafwijking van het gewicht van de blokjes nog steeds 0,3 g is en neemt men een onbetrouwbaarheidsdrempel van $\alpha = 0,05$.

- 2pt a Formuleer de nulhypothese en de alternatieve hypothese voor deze toetsingsprocedure.

Het gemiddelde gewicht van de 25 blokjes is 5,9 g. Dit geeft een overschrijdingskans van 0,048.

- 3pt b Bereken de parameters μ en σ van de toetsingsgrootte die is gebruikt om deze overschrijdingskans te berekenen.

- 2pt c Wat is de conclusie van deze toetsingsprocedure?
Motiveer uw antwoord!

Opgave 6 staat op de volgende pagina !

Opgave 6 – De verspreiding van het coronavirus

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Bij de start van de tweede coronagolf nam het aantal nieuwe besmettingen in Nederland exponentieel toe. In de week van 30 september tot 6 oktober waren er 27 485 nieuwe besmettingen, in de week daarna (7 – 13 oktober) waren er 43 903 nieuwe besmettingen.

- 5pt a Bereken algebraïsch de tijd in dagen waarin het aantal nieuwe besmettingen verdubbeld zou zijn als dit aantal in de volgende weken exponentieel zou zijn blijven groeien. Rond uw antwoord af op 2 cijfers achter de komma.

Op 14 oktober werd een gedeeltelijke lockdown van kracht in Nederland. Wetenschappers hebben verschillende modellen ontwikkeld om het effect van deze gedeeltelijke lockdown te voorspellen. In één van die modellen wordt het aantal nieuwe besmettingen per dag gegeven door de formule

$$N = \frac{30\,000}{1 + 2e^{0,1t}}$$

(t in dagen, $t = 0$ op 1 november 2020)

- 5pt b Bereken algebraïsch op welke datum er volgens dit model 100 nieuwe besmettingen zullen zijn in Nederland.

Einde van het tentamen.

*Als u klaar bent met het tentamen, controleer dan of **uw naam** en het **opgavenummer** op ieder antwoordblad staat.*

Doe de antwoordbladen in de juiste volgorde in het plastic mapje en doe het blaadje met uw gegevens voorop in dit mapje.

*Wat er **niet** in het mapje moet:*

- lege blaadjes, laat deze s.v.p. op uw tafel liggen;*
- blaadjes waar alleen uw naam op staat, neem deze s.v.p. mee;*
- kladpapier;*
- deze opgaven.*

Alleen zo kunnen wij zorgen voor een vlotte correctie van uw tentamenwerk.

Blijf zitten totdat één van de surveillanten uw mapje inneemt (of u bij zich roept).

Formulelijst Wiskunde A

Tweedegraads vergelijkingen

De oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$ en $b^2 - 4ac \geq 0$ zijn

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{en} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Differentiëren

Naam van de regel	Functie	Afgeleide
Somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
Productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotiëntregel	$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
Kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ ofwel $\frac{dk}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$

Logaritmen

Regel	Voorwaarden
${}^g\log a + {}^g\log b = {}^g\log ab$	$g > 0, g \neq 1, a > 0, b > 0$
${}^g\log a - {}^g\log b = {}^g\log \frac{a}{b}$	$g > 0, g \neq 1, a > 0, b > 0$
${}^g\log a^p = p \cdot {}^g\log a$	$g > 0, g \neq 1, a > 0$
${}^g\log a = \frac{{}^p\log a}{{}^p\log g}$	$g > 0, g \neq 1, a > 0, p > 0, p \neq 1$

Rijen

rekenkundige rij:	$Som = \frac{1}{2} \cdot \text{aantal termen} \cdot (u_e + u_l)$
meetkundige rij:	$Som = \frac{u_{l+1} - u_e}{r - 1} \quad (r \neq 1)$
<i>In beide formules geldt:</i>	$e = \text{rangnummer eerste term}; \quad l = \text{rangnummer laatste term}$

Meer formules op de volgende pagina.

Formulelijst wiskunde A (vervolg)

Kansrekening

Voor alle toevalsvariabelen X en Y geldt: $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Voor onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt: $\sigma(X + Y) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y)}$

\sqrt{n} -wet:

Bij een serie van n onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som S en voor het gemiddelde \bar{X} van de uitkomsten X :

$$E(S) = n \cdot E(X)$$

$$\sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$$

$$E(\bar{X}) = E(X)$$

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele X , waarbij n het aantal experimenten is en p de kans op succes per keer, geldt:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \quad \text{met } k = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$\text{Verwachtingswaarde: } E(X) = np$$

$$\text{Standaardafwijking: } \sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$$

n en p zijn de parameters van de binomiale verdeling.

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele X die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \text{ is standaard normaal verdeeld en } P(X < g) = P\left(Z < \frac{g - \mu}{\sigma}\right)$$

μ en σ zijn de parameters van de normale verdeling.

Toetsen van hypothesen

Bij een toetsingsprocedure waarbij de toetsingsgrootte T normaal verdeeld is met gemiddelde μ_T en standaardafwijking σ_T zijn de grenswaarden voor het beslissingscriterium:

α	linkszijdig	rechtszijdig	tweezijdig
0,05	$g = \mu_T - 1,645\sigma_T$	$g = \mu_T + 1,645\sigma_T$	$g_l = \mu_T - 1,96\sigma_T$ $g_r = \mu_T + 1,96\sigma_T$
0,01	$g = \mu_T - 2,33\sigma_T$	$g = \mu_T + 2,33\sigma_T$	$g_l = \mu_T - 2,58\sigma_T$ $g_r = \mu_T + 2,58\sigma_T$