CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

Tentamen Wiskunde A

Datum: 17 april 2021
Tijd: 140 minuten (2 uur en 20 minuten)
Aantal opgaven: 6

Lees onderstaande aanwijzingen s.v.p. goed door voordat u met het tentamen begint. Als u zich niet aan deze aanwijzingen houdt, kan dit tot aftrek van punten leiden.

Zet uw naam op alle in te leveren antwoordbladen.

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad.

Laat bij elke vraag door middel van een redenering, een berekening, of een toelichting op het gebruik van de rekenmachine zien hoe het antwoord is verkregen. Zonder redenering of berekening worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend (*zie ook opgave 1*).

Schrijf leesbaar en met inkt. Gebruik geen correctievloeistof zoals tipp-ex. Gebruik van een potlood is alleen toegestaan bij het tekenen van grafieken.

Bij het tentamen kunt u gebruik maken van een eenvoudige wetenschappelijke rekenmachine. **Overige hulpmiddelen, zoals een grafische rekenmachine, een rekenmachine met de mogelijkheid om integralen te berekenen, een formulekaart, BINAS of een tabellenboek, zijn NIET toegestaan**.

Op de laatste twee bladzijden van dit tentamen is een lijst met formules afgedrukt.

Het gebruik van een mobiele telefoon of andere telecommunicatieapparatuur tijdens het tentamen is verboden. Zet uw **mobiele telefoon uit** en stop deze in uw tas.

Omdat de tijd voor dit tentamen teruggebracht is tot 140 minuten, is het aantal vragen per opgave ook teruggebracht. Daardoor is het totale aantal punten dat behaald kan worden teruggebracht tot 72.

Te behalen punten per onderdeel:

Opgave	1	2	3	4	5	6
a	5	4	5	3	5	2
b	5	4	1	5	5	5
c	6	3	4	4		
d	4		2			
Totaal	20	11	12	12	10	7

Cijfer $= \dfrac{\text{behaald aantal punten}}{8} + 1$

U bent geslaagd als uw cijfer 5,5 of hoger is.

Opgave 1 – Algebraïsche vaardigheden

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

*Bij het **algebraïsch** uitwerken van opgaven moet de berekening volledig op papier worden gegeven. Het aflezen van functiewaarden uit een al dan niet met een rekenmachine gemaakte tabel is geen algebraïsche berekening. De rekenmachine mag wel gebruikt worden voor eenvoudige berekeningen en voor het benaderen van getallen zoals* $\sqrt{2}$ *en* $\log(3)$*.*
Tenzij anders vermeld, dienen alle berekeningen in dit tentamen algebraïsch te worden uitgewerkt.

De functie f wordt gegeven door $f(x) = x^3 + 4x^2 - 8x + 4$.
De functie g wordt gegeven door $g(x) = (2x + 2)^2$.
De lijn ℓ wordt gegeven door de vergelijking $y = -5x + 7$.

5pt a Bereken algebraïsch de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g .

5pt b Bereken algebraïsch de waarden van a waarvoor de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(a, f(a))$ evenwijdig is aan lijn ℓ .

De functie h wordt gegeven door $h(x) = \sqrt{4x^2 + 3}$.

6pt c Bereken algebraïsch de waarde(n) van x waarvoor $h'(x) = 1$.

De functie k wordt gegeven door $k(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-2x+2}$.
Punt *P* is het snijpunt van de grafiek k met de verticale lijn met vergelijking $x = 1$.

4pt d Bereken algebraïsch de helling van de grafiek van k in punt *P*.

Opgave 2 – De winst op een product

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

De winst op een product is het verschil tussen de opbrengsten en de kosten.
Voor een zeker product worden de kosten C gegeven door de formule

$$C = \frac{q^2 + 8q + 4}{q + 4}$$

In deze formule is C in duizenden euro's en is q gewicht van het product in tonnen (1 ton = 1000 kg, dus q hoeft geen geheel getal te zijn).
Dit product wordt op bestelling geproduceerd, dus wordt de gehele productie verkocht.

De prijs van dit product is 2 euro per kg, dus wordt de totale opbrengst van de verkoop van dit product gegeven door

$$R = 2q$$

met R in duizenden euro's.

De totale winst op dit product wordt zodoende gegeven door

$$P = \frac{q^2 - 4}{q + 4}$$

4pt **a** Laat zien hoe deze formule voor P afgeleid wordt uit de hierboven gegeven formules voor C en R.

4pt **b** Toon algebraïsch aan dat de afgeleide van de winstfunctie gegeven wordt door

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}q} = \frac{q^2 + 8q + 4}{q^2 + 8q + 16}$$

3pt **c** Gebruik deze afgeleide om algebraïsch aan te tonen dat de winstfunctie stijgend is voor alle waarden van q waar deze bestaat.

Opgave 3 – Griep weg?

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Het farmaceutisch bedrijf Pilfit brengt een nieuwe pil op de markt onder de naam Griepweg. Het bedrijf claimt dat bij 20% van de gebruikers de griep na één dag verdwenen is.

Ga er bij de beantwoording van vraag a van uit dat deze claim waar is.
Geef het antwoord van vraag a afgerond op vier decimalen.

10 grieppatiënten gebruiken de Griepweg pil.

5pt **a** Bereken de kans dat bij tenminste twee van deze 10 gebruikers de griep na één dag verdwenen is.

Pilfit claimt ook dat bij 50% van de gebruikers van Griepweg de griep binnen twee dagen verdwenen is. De Gezondheidsraad heeft haar twijfels. Zij verwacht dat de griep bij minder dan 50% van de gebruikers verdwenen is en besluit dit te toetsen.

1pt **b** Formuleer de nulhypothese en de alternatieve hypothese voor deze toetsingsprocedure.

16 willekeurig gekozen patiënten krijgen Griepweg. Na twee dagen hebben 12 van deze patiënten nog steeds griep.

4pt **c** Bereken de kans dat 12 van de 16 patiënten na twee dagen nog steeds griep hebben als de claim van Pilfit waar is.

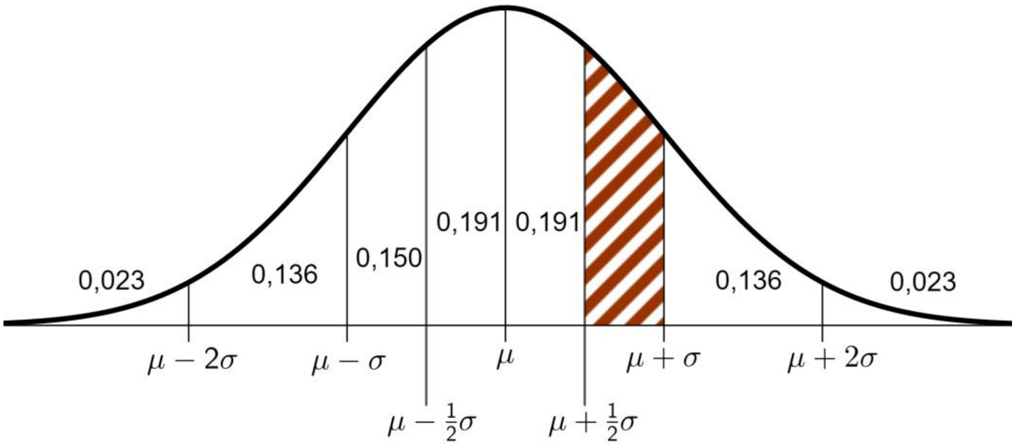
2pt **d** Kunt u een conclusie trekken voor deze toetsingsprocedure. Zo ja, formuleer en motiveer deze conclusie, zo nee, leg uit waarom niet.

Opgave 4 – Pijnstillers

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Pilfit produceert ook pijnstillertabletten. De gewichten van deze tabletten zijn normaal verdeeld met een gemiddelde van 500 mg en een standaardafwijking van 10 mg.

3pt a Gebruik de figuur hieronder om het percentage van deze tabletten te berekenen dat een gewicht heeft tussen 495 mg en 520 mg.



Een normale kansverdeling X. De oppervlakte van het gearceerde vlakdeel komt overeen met $P\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma < X < \mu + \sigma\right) = 0{,}150$.

Deze tabletten worden verkocht in doosjes van 50. De gewichten van deze doosjes zijn normaal verdeeld met een gemiddelde van 10 g en een standaardafwijking van 0,5 g. De 50 tabletten in een doosje worden willekeurig gekozen. Het totale gewicht van zo'n pakje (doosje + tabletten) is een toevalsvariabele Y.

5pt b Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van *Y*.

Pilfit verkoopt verder nog pijnstillertabletten voor kinderen. Deze worden verkocht in doosjes die twee oranje, drie rode en vier blauwe tabletten bevatten. De drie kinderen van Joke hebben alle drie zo'n tablet nodig, dus pakt zij drie willekeurige tabletten uit zo'n doosje.

4pt c Bereken de kans dat de tabletten die zij pakt alle drie dezelfde kleur hebben.

Opgave 5 – Het R-getal

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Het basisreproductiegetal, ook bekend als de R of R0, is het gemiddelde aantal mensen dat één persoon met een infectieziekte in de toekomst waarschijnlijk zal infecteren.

Een R van 3,5 zou bijvoorbeeld betekenen dat 100 mensen met het nieuwe coronavirus waarschijnlijk 350 mensen zouden infecteren. Die 350 zouden het op hun beurt doorgeven aan 1225 mensen. Wanneer de R hoger is dan 1, zal het virus exponentieel groeien in een populatie zonder immuniteit. Bij 1 blijft het stabiel. Onder de 1 zal het virus geleidelijk minder mensen infecteren, totdat de epidemie opdroogt.

Bron: https://www.newscientist.com/definition/r-number/ *(vertaald met Google Translate)*

Bij het voorspellen van het aantal geïnfecteerde personen speelt ook de tijd waarin een geïnfecteerde persoon andere personen kan infecteren een belangrijke rol. Als $R = 2$ en deze tijd 1 week is, zal het aantal nieuw geïnfecteerde personen in 1 week verdubbelen.

5pt **a** Bereken algebraïsch de tijd in dagen waarin het aantal nieuw geïnfecteerde personen zal verdubbelen als $R = 1{,}44$ en de tijd waarin een geïnfecteerde persoon anderen kan infecteren 2 dagen is.

Het werkelijke R-getal van een ziekte zal afnemen als personen die de ziekte al hadden minder kans hebben om de ziekte opnieuw op te lopen en door vaccinatie. Voor een bepaalde ziekte (niet corona) wordt dit effect gemodelleerd door de formule

$$R = \frac{4}{1 + 2\mathrm{e}^{0{,}1t}}$$

(t in maanden, $t = 0$ bij de start van de vaccinatiecampagne)

5pt **b** Bereken algebraïsch de tijd in dagen waarin volgens deze formule het werkelijke R-getal gelijk zal zijn aan 1. Geef uw antwoord afgerond op hele dagen (1 maand = 30 dagen).

Opgave 6 – Op en neer

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Een kogel is door middel van een veer opgehangen aan het plafond. Aanvankelijk is de kogel in rust. Op een zeker moment wordt de kogel een stukje omlaag getrokken en vervolgens losgelaten. Hierdoor gaat de kogel op en neer bewegen. Een student bestudeert de beweging van de kogel. Uit nauwkeurige metingen blijkt dat de afstand van het middelpunt van de kogel en het plafond wordt weergegeven door de formule

$$D = 13{,}5 + 4{,}0 \sin\left(\tfrac{1}{3}\pi\left(t + \tfrac{3}{2}\right)\right)$$

In deze formule is t de tijd in seconden en is D de afstand van het midden van de kogel tot het plafond in centimeters.

2pt a Wat is de minimale en de maximale afstand van het middelpunt van de kogel tot het plafond gedurende de beweging?

Op $t = 1$ is de afstand tussen het middelpunt van de kogel en het plafond 15,5 cm.

5pt b Gebruik de periode van D om de eerste drie tijdstippen na $t = 1$ te bepalen waarop $D = 15{,}5$ cm.

Einde van het tentamen.

*Als u klaar bent met het tentamen, controleer dan of **uw naam** en het **opgavenummer** op ieder antwoordblad staat.*
Doe de antwoordbladen in de juiste volgorde in het plastic mapje en doe het blaadje met uw gegevens voorop in dit mapje.

*Wat er **niet** in het mapje moet:*
- lege blaadjes, laat deze s.v.p. op uw tafel liggen;
- blaadjes waar alleen uw naam op staat, neem deze s.v.p. mee;
- kladpapier;
- deze opgaven.

Alleen zo kunnen wij zorgen voor een vlotte correctie van uw tentamenwerk.

Blijf zitten totdat één van de surveillanten uw mapje inneemt (of u bij zich roept).

Formulelijst Wiskunde A

Tweedegraads vergelijkingen

De oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$ en $b^2 - 4ac \geq 0$ zijn

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{en} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Differentiëren

Naam van de regel	**Functie**	**Afgeleide**
Somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
Productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotiëntregel	$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$
Kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$ ofwel $\frac{dk}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$

Logaritmen

Regel	**Voorwaarden**
${}^{g}\log a + {}^{g}\log b = {}^{g}\log ab$	$g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0,\ b > 0$
${}^{g}\log a - {}^{g}\log b = {}^{g}\log \frac{a}{b}$	$g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0,\ b > 0$
${}^{g}\log a^p = p \cdot {}^{g}\log a$	$g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0$
${}^{g}\log a = \frac{{}^{p}\log a}{{}^{p}\log g}$	$g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0,\ p > 0,\ p \neq 1$

Rijen

rekenkundige rij:	$Som = \frac{1}{2} \cdot aantal\ termen \cdot (u_e + u_l)$
meetkundige rij:	$Som = \frac{u_{l+1} - u_e}{r - 1} \quad (r \neq 1)$
In beide formules geldt:	*e* = rangnummer eerste term; *l* = rangnummer laatste term

Meer formules op de volgende pagina.

Formulelijst wiskunde A (vervolg)

Kansrekening

Voor alle toevalsvariabelen *X* en *Y* geldt: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
Voor onafhankelijke toevalsvariabelen *X* en *Y* geldt: $\sigma(X+Y)=\sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$-wet:
Bij een serie van *n* onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som *S* en voor het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten *X*:

$E(S)=n\cdot E(X)$ $\qquad$ $\sigma(S)=\sqrt{n}\cdot\sigma(X)$

$E(\overline{X})=E(X)$ $\qquad$ $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele *X*, waarbij *n* het aantal experimenten is en *p* de kans op succes per keer, geldt:

$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ met $k=0,1,2,\ldots,n$

Verwachtingswaarde: $E(X)=np$ $\qquad$ Standaardafwijking: $\sigma(X)=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$

n en *p* zijn de parameters van de binomiale verdeling.

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele *X* die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard normaal verdeeld en $P(X<g)=P\left(Z<\frac{g-\mu}{\sigma}\right)$

μ en σ zijn de parameters van de normale verdeling.

Toetsen van hypothesen

Bij een toetsingsprocedure waarbij de toetsingsgrootheid *T* normaal verdeeld is met gemiddelde μ_T en standaardafwijking σ_T zijn de grenswaarden voor het beslissingscriterium:

α	linkszijdig	rechtszijdig	tweezijdig
0,05	$g=\mu_T-1{,}645\sigma_T$	$g=\mu_T+1{,}645\sigma_T$	$g_l=\mu_T-1{,}96\sigma_T$
			$g_r=\mu_T+1{,}96\sigma_T$
0,01	$g=\mu_T-2{,}33\sigma_T$	$g=\mu_T+2{,}33\sigma_T$	$g_l=\mu_T-2{,}58\sigma_T$
			$g_r=\mu_T+2{,}58\sigma_T$

