CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

Tentamen Wiskunde A

Datum:	17 juli 2021
Tijd:	140 minuten (2 uur en 20 minuten)
Aantal opgaven:	6

Lees onderstaande aanwijzingen s.v.p. goed door voordat u met het tentamen begint. Als u zich niet aan deze aanwijzingen houdt, kan dit tot aftrek van punten leiden.

Zet uw naam op alle in te leveren antwoordbladen.

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad.

Laat bij elke vraag door middel van een redenering, een berekening, of een toelichting op het gebruik van de rekenmachine zien hoe het antwoord is verkregen. Zonder redenering of berekening worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend (*zie ook opgave 1*).

Schrijf leesbaar en met inkt. Gebruik geen correctievloeistof zoals tipp-ex. Gebruik van een potlood is alleen toegestaan bij het tekenen van grafieken.

Bij het tentamen kunt u gebruik maken van een eenvoudige wetenschappelijke rekenmachine. **Overige hulpmiddelen, zoals een grafische rekenmachine, een rekenmachine met de mogelijkheid om integralen te berekenen, een formulekaart, BINAS of een tabellenboek, zijn NIET toegestaan**.

Op de laatste twee bladzijden van dit tentamen is een lijst met formules afgedrukt.

Het gebruik van een mobiele telefoon of andere telecommunicatieapparatuur tijdens het tentamen is verboden. Zet uw **mobiele telefoon uit** en stop deze in uw tas.

Omdat de tijd voor dit tentamen teruggebracht is tot 140 minuten, is het aantal vragen per opgave ook teruggebracht. Daardoor is het totale aantal punten dat behaald kan worden teruggebracht tot 72.

Te behalen punten per onderdeel:

Opgave	1	2	3	4	5	6
a	5	5	3	4	5	4
b	5	5	5	2	2	4
c	5		1	4	4	
d			4	3		
e			2			
Totaal	15	10	15	13	11	8

Cijfer $= \dfrac{\text{behaald aantal punten}}{8} + 1$

U bent geslaagd als uw cijfer 5,5 of hoger is.

Opgave 1 – Algebraïsche berekeningen

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

*Bij het **algebraïsch** uitwerken van opgaven moet de berekening volledig op papier worden gegeven. Het aflezen van functiewaarden uit een al dan niet met een rekenmachine gemaakte tabel is geen algebraïsche berekening. De rekenmachine mag wel gebruikt worden voor eenvoudige berekeningen en voor het benaderen van getallen zoals* $\sqrt{2}$ *en* $\log(3)$.
Tenzij anders vermeld, dienen alle berekeningen in dit tentamen algebraïsch te worden uitgewerkt.

De functie f wordt gegeven door $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 4$.

5pt a Bereken algebraïsch de *x*-coördinaten van de punten op de grafiek van f waar de raaklijn horizontaal loopt.

De functies g en h worden gegeven door $g(x) = 3 \cdot 2^x$ en $h(x) = 12^x$.

5pt b Bereken algebraïsch de *x*-coördinaat van het snijpunt van de grafieken van g en h. Geef een benadering van uw antwoord afgerond op twee cijfers achter de komma.

De functie k wordt gegeven door $k(x) = \sqrt{3x^2 - 4}$.

5pt c Bereken algebraïsch de waarde(n) van x waarvoor $k'(x) = 3$.

Opgave 2 – De verspreiding van een griepvirus

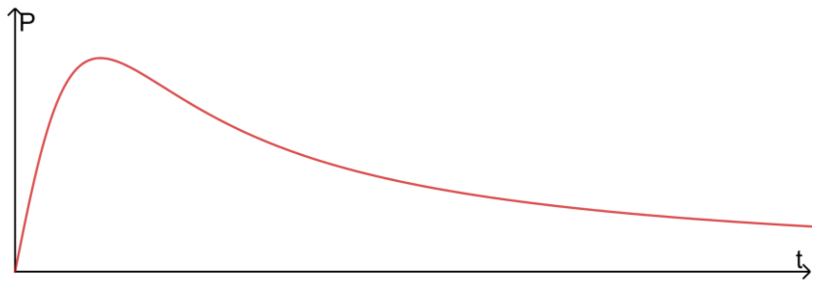
Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

In normale winters ontstaat vaak een nieuwe variant van het griepvirus. In een zeker jaar wordt het percentage van de bevolking van in land L dat ziek thuis moet blijven omdat ze besmet zijn met de nieuwe variant van het griepvirus van dat jaar, gemodelleerd met de formule

$$P = \frac{100t}{400 + t^2}$$

met t in dagen.

In de figuur hieronder ziet u de grafiek van P die bij deze formule past.



5pt a Bereken algebraïsch het maximale percentage van de bevolking van land L dat ziek thuis moet blijven omdat ze besmet zijn met deze nieuwe variant van het griepvirus.

5pt b Bereken algebraïsch het aantal dagen waarop meer dan 2% van de bevolking van land L ziek thuis moet blijven omdat ze besmet zijn met deze nieuwe variant van het griepvirus.

Opgave 3 – Twee dobbelstenen

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Bij een spelletje wordt geworpen met twee dobbelstenen. Een van deze dobbelstenen is een gewone dobbelsteen, met zes vlakken waarop de cijfers 1 t/m 6 staan. De andere is een speciale dobbelsteen: deze heeft ook zes vlakken maar op een van de vlakken staat het cijfer 1, op twee zijvlakken staat het cijfer 2, en op de drie andere zijvlakken staat het cijfer 3. Bij elke ronde van het spelletje wordt eenmaal met de ene en eenmaal met de andere dobbelsteen gegooid en vervolgens wordt de som van de geworpen cijfers geteld.

In vraag a en b nemen we aan dat beide dobbelstenen “eerlijk” zijn, dat wil zeggen dat elk vlak evenveel kans heeft om geworpen te worden.

3pt **a** Bereken de kans dat de som van de cijfers op de beide dobbelstenen gelijk is aan 7.

Twee kinderen, Astrid en Bartje, doen het volgende spelletje. In elke ronde wordt eenmaal met beide dobbelstenen gegooid; als de som van de cijfers op de twee dobbelstenen even is krijgt Astrid een punt, en als die som oneven is, krijgt Bartje een punt. Wie het eerst drie punten heeft verzameld, heeft gewonnen.

5pt **b** Bereken de kans dat dit spelletje in precies vier ronden is afgelopen.

Na verloop van tijd blijkt dat de som van de cijfers minder vaak gelijk is aan 7 is dan op grond van de uitkomst van vraag a verwacht mag worden. Astrid vermoedt dat dit komt omdat bij de speciale dobbelsteen de kans dat het cijfer 1 geworpen wordt groter is dan bij een eerlijke dobbelsteen. Om dit te toetsen werpt zij 36 keer met deze dobbelsteen. In deze 36 worpen wordt 10 keer het cijfer 1 geworpen.

1pt **c** Formuleer de nulhypothese en de alternatieve hypothese voor deze toetsingsprocedure.

4pt **d** Bereken de kans dat als de speciale dobbelsteen eerlijk is, het cijfer 1 in 10 van de 36 keer geworpen wordt.

2pt **e** Kunt u op grond van uw antwoord van vraag d een conclusie trekken voor deze toetsingsprocedure? Zo ja, formuleer en motiveer deze conclusie, zo nee, leg uit waarom niet.

Opgave 4 – Zeearenden in Nederland

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Zeearenden hebben de bijnaam 'vliegende deuren' vanwege hun enorme en massieve vleugels die een spanbreedte kunnen hebben van bijna 2,5 meter. Gedurende een lange periode kwamen zeearenden niet in Nederland voor, tot in 2006 een eerste zeearendenpaar zich in de Oostvaardersplassen vestigde.

In elf jaar tijd, van 2009 tot en met 2020, is het aantal broedparen echter bij benadering exponentieel toegenomen van 2 naar 15. We gebruiken daarom een model met een exponentieel verband tussen het aantal broedparen A en de tijd in jaren t, met $A = 2$ op $t = 0$ en $A = 15$ op $t = 11$.

4pt a Bereken algebraïsch met hoeveel procent per jaar het aantal broedparen volgens dit model is toegenomen van 2009 tot 2020.

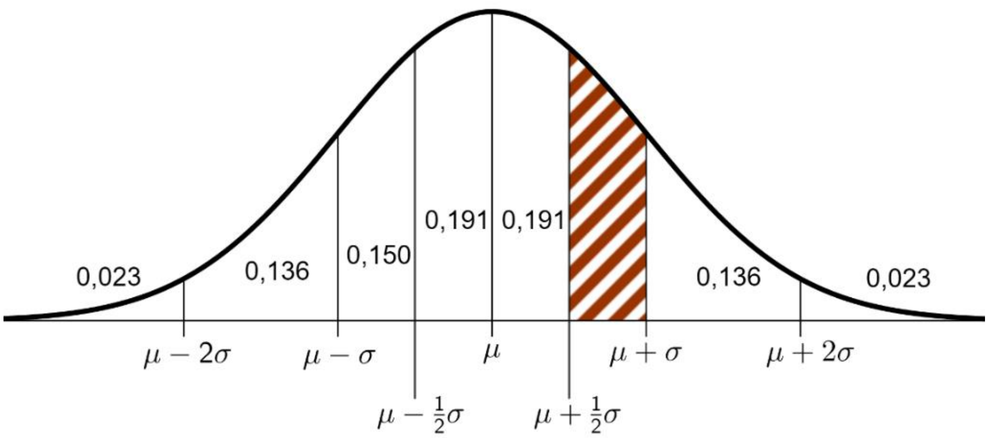
Nadat een jonge zeearend uit het ei gekomen is (dit noemt men de geboortedag), duurt het 70 tot 90 dagen totdat het jong het nest verlaat. Deze tijdsperiode noemt men de uitvliegtijd en deze is normaal verdeeld met gemiddelde $\mu = 80$ dagen en standaardafwijking $\sigma = \frac{10}{3}$ dagen.

2pt b Leg met behulp van onderstaande figuur uit dat er vrijwel geen jonge zeearenden zijn die een uitvliegtijd van minder dan 70 of meer dan 90 dagen hebben.

4pt c Bereken met behulp van onderstaande figuur de kans dat een jonge zeearend een uitvliegtijd van minder dan 81 dagen en 16 uur heeft.

In 2020 zijn in Nederland 20 jonge zeearenden uitgevlogen. De totale uitvliegtijd van deze 20 jongen is een normaal verdeelde toevalsvariabele T.

3pt d Bereken μ_T en σ_T.

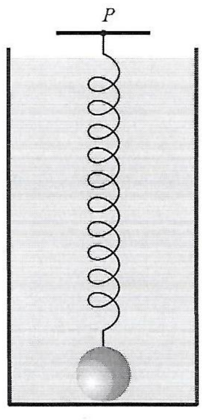


Een normale kansverdeling X. De oppervlakte van het gearceerde vlakdeel komt overeen met $P\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma < X < \mu + \sigma\right) = 0{,}150$.

Opgave 5 – Bol in reservoir met een stroperige vloeistof

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

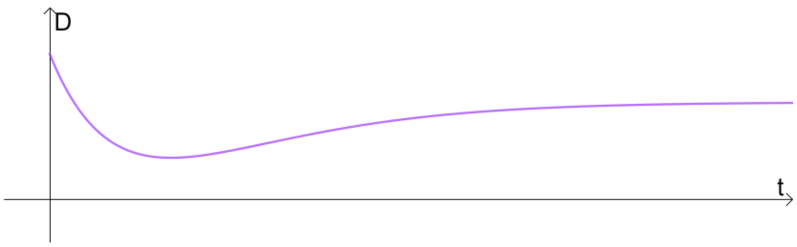
In de figuur hiernaast ziet u een reservoir gevuld met een stroperige vloeistof. In het reservoir bevindt zich, bevestigd aan de bodem, een bol. De bol is verbonden met een punt *P* door een uitgerekte veer.
Als de bol wordt losgemaakt van de bodem van het reservoir, begint de bol een verticale beweging omhoog. Uit onderzoek is gebleken dat t seconden na het moment van losmaken, de afstand D van het middelpunt van de bol tot punt *P* wordt gegeven door de formule



$$D = 10 + (5 - t)\mathrm{e}^{-0{,}05t}$$

In deze formule is D in centimeter.

In de figuur hieronder ziet u de grafiek van D die bij deze formule past.



Zoals u in de grafiek kunt zien is D op een zeker moment minimaal. De bol is dan op zijn hoogste punt. Daarna zakt deze weer langzaam terug in de vloeistof.

5pt **a** Toon met behulp van de afgeleide functie aan dat de bol de minimale afstand tot punt *P* bereikt op $t = 25$.

Op den duur komt de bol stil te hangen in de vloeistof.

2pt **b** Bereken de afstand tussen het middelpunt van de bol en *P* die op den duur bereikt wordt.

De hoogte van het reservoir is gelijk aan de afstand van *P* tot de bodem van het reservoir. Het volume van de bol is 33,51 cm^3. Het verband tussen het volume V en de straal r van de bol wordt gegeven door $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

4pt **c** Bereken algebraïsch de hoogte van het reservoir in cm.
Aanwijzing: bereken eerst de straal r van de bol.

Opgave 6 – Bol in vacuüm vat

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

De bol uit opgave 5 wordt nu niet in een reservoir met een stroperige vloeistof opgehangen, maar in een vat dat vacuüm gezogen is. De beweging van de bol wordt dan niet geremd, zodat de bol nadat hij van de bodem is losgemaakt op en neer blijft bewegen. De afstand tussen het middelpunt van de bol en het bevestigingspunt *P* van de veer wordt dan gegeven door een formule van de vorm

$$D = a + b\sin\left(ct + \frac{1}{2}\pi\right)$$

In deze formule is D weer in cm en is t weer in seconden.

Op $t = 0$ wordt de bol van de bodem losgemaakt en is de afstand tussen *P* en het middelpunt van de bol gelijk aan 25 cm. Dit is de maximale waarde van D.
Op $t = 12$ bereikt de bol voor het eerst zijn hoogste punt en is de afstand tussen *P* en het middelpunt van de bol dus voor het eerst minimaal. Deze minimale afstand is 12 cm.

4pt a Bereken algebraïsch de waarden van a, b en c in de formule voor D.

Op $t = 8$ is de afstand tussen het middelpunt van de bol en *P* 15,25 cm.

4pt b Bereken algebraïsch de eerste drie tijdstippen na $t = 8$ waarop deze afstand 15,25 cm is.

Einde van het tentamen. *Als u klaar bent met het tentamen, controleer dan of* ***uw naam*** *en het* ***opgavenummer*** *op ieder antwoordblad staat.* *Doe de antwoordbladen in de juiste volgorde in het plastic mapje en doe het blaadje met uw gegevens voorop in dit mapje.* *Wat er* ***niet*** *in het mapje moet:* *- lege blaadjes, laat deze s.v.p. op uw tafel liggen;* *- blaadjes waar alleen uw naam op staat, neem deze s.v.p. mee;* *- kladpapier;* *- deze opgaven.* *Alleen zo kunnen wij zorgen voor een vlotte correctie van uw tentamenwerk.* *Blijf zitten totdat één van de surveillanten uw mapje inneemt (of u bij zich roept).*

Formulelijst Wiskunde A

Tweedegraads vergelijkingen

De oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$ en $b^2 - 4ac \geq 0$ zijn $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ en $x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Differentiëren

Naam van de regel	**Functie**	**Afgeleide**
Somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
Productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotiëntregel	$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$
Kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$ ofwel $\frac{dk}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$

Logaritmen

Regel	**Voorwaarden**
${}^{g}\log a + {}^{g}\log b = {}^{g}\log ab$	$g > 0,\ \ g \neq 1,\ \ a > 0,\ \ b > 0$
${}^{g}\log a - {}^{g}\log b = {}^{g}\log \frac{a}{b}$	$g > 0,\ \ g \neq 1,\ \ a > 0,\ \ b > 0$
${}^{g}\log a^{p} = p \cdot {}^{g}\log a$	$g > 0,\ \ g \neq 1,\ \ a > 0$
${}^{g}\log a = \frac{{}^{p}\log a}{{}^{p}\log g}$	$g > 0,\ \ g \neq 1,\ \ a > 0,\ \ p > 0,\ \ p \neq 1$

Rijen

rekenkundige rij:	$Som = \frac{1}{2} \cdot aantal\ termen \cdot (u_e + u_l)$
meetkundige rij:	$Som = \frac{u_{l+1} - u_e}{r - 1} \quad (r \neq 1)$
In beide formules geldt:	*e* = rangnummer eerste term; *l* = rangnummer laatste term

Meer formules op de volgende pagina.

Formulelijst wiskunde A (vervolg)

Kansrekening

Voor alle toevalsvariabelen *X* en *Y* geldt: $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
Voor onafhankelijke toevalsvariabelen *X* en *Y* geldt: $\sigma(X+Y) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$-wet:
Bij een serie van *n* onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som *S* en voor het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten *X*:

$E(S) = n \cdot E(X)$ $\quad\quad$ $\sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$

$E(\overline{X}) = E(X)$ $\quad\quad$ $\sigma(\overline{X}) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele *X*, waarbij *n* het aantal experimenten is en *p* de kans op succes per keer, geldt:

$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ met $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

Verwachtingswaarde: $E(X) = np$ $\quad\quad$ Standaardafwijking: $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

n en *p* zijn de parameters van de binomiale verdeling.

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele *X* die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard normaal verdeeld en $P(X < g) = P\left(Z < \frac{g-\mu}{\sigma}\right)$

μ en σ zijn de parameters van de normale verdeling.

Toetsen van hypothesen

Bij een toetsingsprocedure waarbij de toetsingsgrootheid *T* normaal verdeeld is met gemiddelde μ_T en standaardafwijking σ_T zijn de grenswaarden voor het beslissingscriterium:

α	linkszijdig	rechtszijdig	tweezijdig
0,05	$g = \mu_T - 1{,}645\sigma_T$	$g = \mu_T + 1{,}645\sigma_T$	$g_l = \mu_T - 1{,}96\sigma_T$
			$g_r = \mu_T + 1{,}96\sigma_T$
0,01	$g = \mu_T - 2{,}33\sigma_T$	$g = \mu_T + 2{,}33\sigma_T$	$g_l = \mu_T - 2{,}58\sigma_T$
			$g_r = \mu_T + 2{,}58\sigma_T$

