

CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

Tentamen Wiskunde B

Datum: 18 december 2021

Tijd: 13.30 – 16.30 uur

Aantal opgaven: 5

Antwoordbladen: 1 (bij opgave 4b)

Lees onderstaande aanwijzingen s.v.p. goed door voordat u met het tentamen begint. Als u zich niet aan deze aanwijzingen houdt, kan dit tot aftrek van punten leiden.

Zet uw naam op alle in te leveren antwoordbladen.

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad.

Laat bij elke vraag door middel van een redenering, een berekening, of een toelichting op het gebruik van de rekenmachine zien hoe het antwoord is verkregen. Zonder redenering of berekening worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend.

Schrijf leesbaar en met inkt. Gebruik geen correctievloeistof zoals tipp-ex.

Gebruik van een potlood is alleen toegestaan bij het tekenen van grafieken.

Bij het tentamen kunt u gebruik maken van een eenvoudige wetenschappelijke rekenmachine. **Overige hulpmiddelen, zoals een grafische rekenmachine, een rekenmachine met de mogelijkheid om integralen te berekenen, een formulekaart, BINAS of een tabellenboek, zijn NIET toegestaan.**

Op de laatste bladzijde van dit tentamen is een lijst met formules afgedrukt.

Het gebruik van een mobiele telefoon of andere telecommunicatieapparatuur tijdens het tentamen is verboden. Zet uw **mobiele telefoon uit** en stop deze in uw tas.

Te behalen punten per onderdeel:					
Opgave	1	2	3	4	5
a	7	3	4	6	5
b	8	3	4	6	5
c		8	6		6
d			3		
e			7		
Totaal	15	14	24	12	16
Cijfer = $\frac{\text{behaald aantal punten}}{9} + 1$					
U bent geslaagd als uw cijfer 5,5 of hoger is.					

Opgave 1 – Een gebroken functie

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

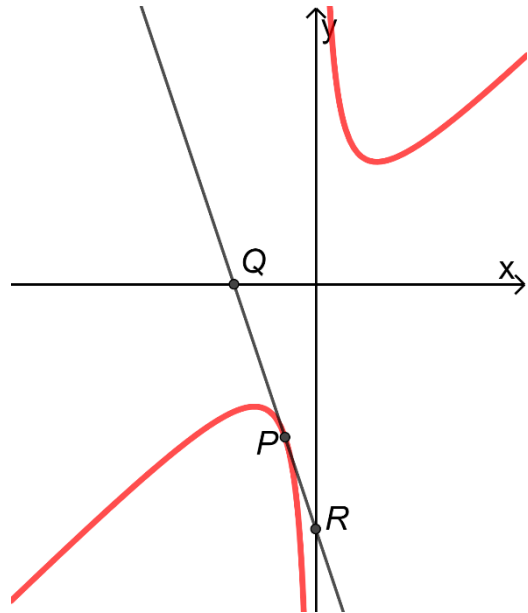
De functie f is gegeven door

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

Het punt $P\left(-\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2}\right)$ ligt op de grafiek van f .

De raaklijn aan de grafiek van f in punt P snijdt de x -as in punt Q en de y -as in punt R .

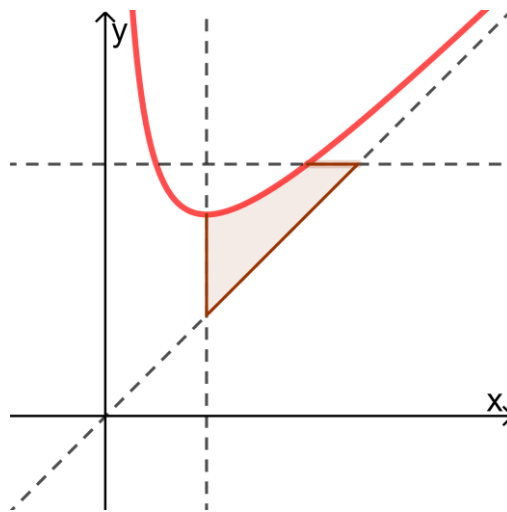
Zie de figuur hiernaast.



- 7pt a Bereken exact de afstand tussen de punten Q en R .

In de figuur hieronder is het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van f , de lijn $y = 2\frac{1}{2}$, de lijn $y = x$ en de lijn $x = 1$ in kleur weergegeven.

- 8pt b Bereken exact de oppervlakte van dit vlakdeel.



Opgave 2 – Gebroken functies en een cirkel

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

De familie functies g_p wordt gegeven door

$$g_p(x) = \frac{x^2 + px + p}{x}$$

- 3pt a Bereken exact de waarden van p waarvoor de grafiek van g_p twee snijpunten met de x -as heeft.

In de figuur hiernaast ziet u de grafiek van de functie

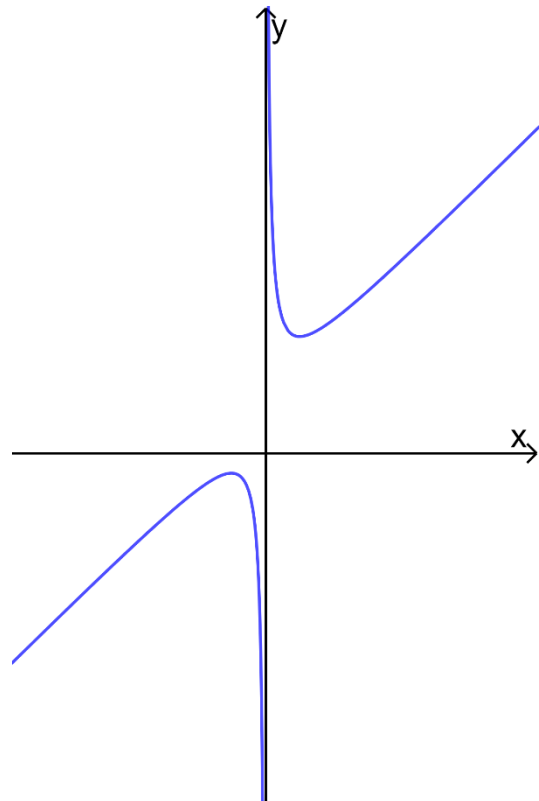
$$g_2(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x}$$

De grafiek van g_2 heeft twee asymptoten.

- 3pt b Geef de vergelijkingen van deze twee asymptoten.

De cirkel c raakt de grafiek van g_2 in het punt $P(2,5)$. Het middelpunt van c ligt op de y -as.

- 8pt c Bereken exact een vergelijking voor deze cirkel.



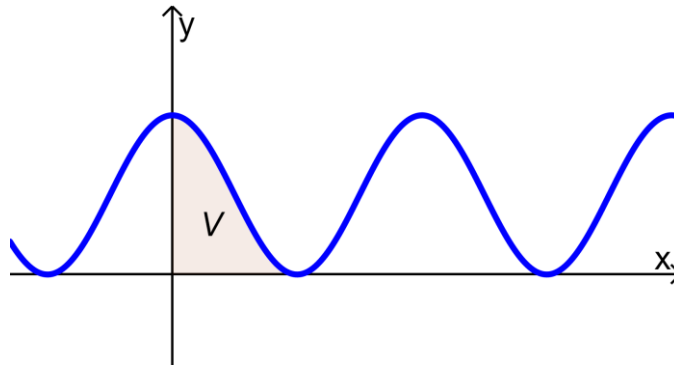
Opgave 3 – Functies met golvende grafieken

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Gegeven is de functie $f(x) = \cos^2(2x)$.

In de figuur hieronder ziet u de grafiek van f .

In deze figuur is een vlakdeel V gekleurd weergegeven. Dit is het vlakdeel rechts van de y -as dat wordt begrensd door de grafiek van f , de x -as en de y -as..



De functie $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin(4x)$ is een primitieve van f .

4pt a Toon dit aan.

4pt b Bereken exact de oppervlakte van vlakdeel V .

De grafiek van f heeft een buigpunt in het punt $P\left(\frac{1}{8}\pi, \frac{1}{2}\right)$.

6pt c Bewijs dit met behulp van de tweede afgeleide van f .

3pt d Bereken algebraïsch de hoek tussen de buigraaklijn aan de grafiek van f in punt P en de y -as. Geef uw antwoord in graden nauwkeurig.

Ook gegeven is de functie $g(x) = 4\frac{1}{2}\cos(2x) - 2$.

7pt e Bereken exact de x -coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g op het interval $0 \leq x \leq \pi$.

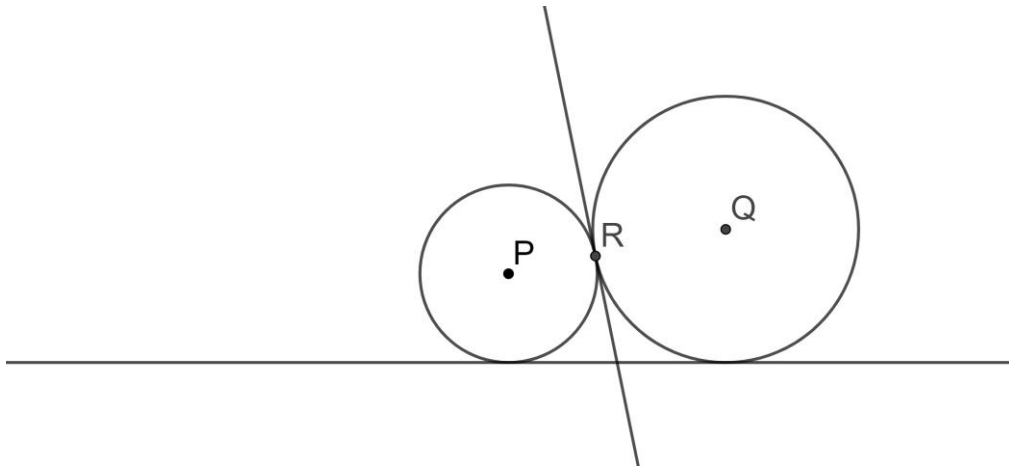
Opgave 4 – Cirkels en (raak)lijnen

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Gegeven zijn de cirkel c met vergelijking $(x - 15)^2 + (y - 5)^2 = 25$ en de lijn m met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

6pt a Bereken exact de afstand tussen de lijn m en de cirkel c .

In de figuur hieronder ziet u twee cirkels met middelpunten P en Q die elkaar raken in punt R . Ook ziet u twee gemeenschappelijke raaklijnen van deze cirkels/



Deze cirkels hebben een derde gemeenschappelijke raaklijn.

6pt b - Teken deze raaklijn op de uitwerkbijlage.
- Toon aan dat de door u getekende lijn inderdaad aan beide cirkels raakt.

Opgave 5 – Exponentiële en logaritmische functies

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Gegeven worden de functies $f(x) = \ln(2x + 1)$ en $g(x) = \frac{1}{2} \ln(x)$.

5pt a Los de vergelijking $f(x) - g(x) = \ln(3)$ exact op.

Verder wordt voor iedere waarde van a en b gegeven de functie $h_{ab}(x) = a + e^{bx}$.

5pt b Bereken exact de waarden van a en b waarvoor geldt dat de grafieken van h_{ab} en f elkaar raken in de oorsprong $O(0,0)$.

V is het vlakdeel dat wordt begrensd door de grafiek van $h_{31}(x) = 3 + e^x$, de y -as, de x -as en de verticale lijn $x = \ln(2)$.

6pt c Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als V wordt gewenteld rond de x -as.

Einde van het tentamen.

*Als u klaar bent met het tentamen, controleer dan of **uw naam** en het **opgavenummer** op ieder antwoordblad staat.*

Doe de antwoordbladen in de juiste volgorde in het plastic mapje en doe het blaadje met uw gegevens voorop in dit mapje.

*Wat er **niet** in het mapje moet:*

- lege blaadjes, laat deze s.v.p. op uw tafel liggen;*
- blaadjes waar alleen uw naam op staat, neem deze s.v.p. mee;*
- kladpapier;*
- deze opgaven.*

Alleen zo kunnen wij zorgen voor een vlotte correctie van uw tentamenwerk.

Blijf zitten totdat één van de surveillanten uw mapje inneemt (of u bij zich roept).

Formulelijst wiskunde B

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin(t + u) = \sin t \cos u + \cos t \sin u$$

$$\sin(t - u) = \sin t \cos u - \cos t \sin u$$

$$\cos(t + u) = \cos t \cos u - \sin t \sin u$$

$$\cos(t - u) = \cos t \cos u + \sin t \sin u$$

$$\sin(2t) = 2 \sin(t) \cos(t)$$

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2 \cos^2(t) - 1 = 1 - 2 \sin^2(t)$$