

CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

Beknopte uitwerkingen Wiskunde B 19 december 2018

1a Er is een verticale raaklijn als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$.

$$x'(t) = 0 \Leftrightarrow 8t^3 - 2t = 0 \Leftrightarrow 2t(4t^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{1}{2} \vee t = -\frac{1}{2}$$

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow t = \pm 1$$

$$t = 0 \Rightarrow x = 0; y = 0$$

$$t = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2}{16} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}; y = \frac{1}{8} - \frac{3}{2} = -\frac{11}{8}$$

$$t = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2}{16} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}; y = -\frac{1}{8} + \frac{3}{2} = \frac{11}{8}$$

1b $x'(t) = 8t^3 - 2t \Rightarrow x'(2) = 8 \cdot 8 - 2 \cdot 2 = 60$

$$y'(t) = 3t^2 - 3 \Rightarrow y'(2) = 3 \cdot 4 - 3 = 9$$

$$v = \sqrt{(x'(2))^2 + (y'(2))^2} = \sqrt{60^2 + 9^2} = \sqrt{3681}$$

1c $y(t) = 0 \Leftrightarrow t^3 - 3t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t^2 = 3 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \sqrt{3} \vee t = -\sqrt{3}$

In het snijpunt met de positieve x-as geldt $t = \sqrt{3} \vee t = -\sqrt{3}$

$$t = \sqrt{3} \text{ geeft snelheidsvector } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x'(\sqrt{3}) \\ y'(\sqrt{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22\sqrt{3} \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$t = -\sqrt{3} \text{ geeft snelheidsvector } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x'(-\sqrt{3}) \\ y'(-\sqrt{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22\sqrt{3} \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{(\vec{v}_1, \vec{v}_2)}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|} = \frac{-484 \cdot 3 + 36}{(\sqrt{484 \cdot 3 + 36})^2} = -0,952 \Rightarrow \alpha = 162^\circ$$

De gezochte hoek is zodoende $180^\circ - 162^\circ = 18^\circ$

1c *Alternatief*

$$t = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y'(\sqrt{3})}{x'(\sqrt{3})} = \frac{3 \cdot 3 - 3}{8 \cdot 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}} = \frac{6}{22\sqrt{3}}$$

De hoek die de stijgende tak met de positieve x-as maakt is $\tan^{-1}\left(\frac{6}{22\sqrt{3}}\right) = 8,9^\circ$

De hoek tussen de twee takken van de baan is zodoende $2 \times 8,9^\circ \approx 18^\circ$

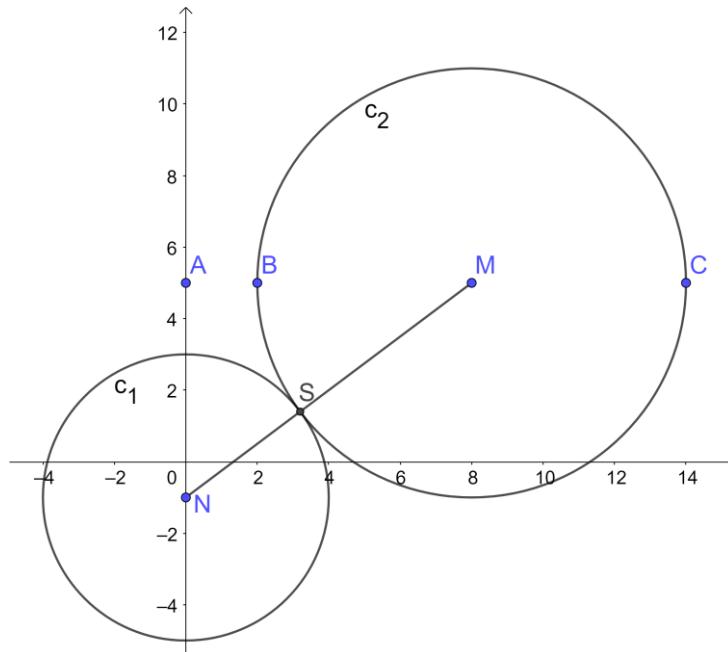
2a Het middelpunt van c_2 is het midden van BC , dat is het punt $M(8,5)$
 De straal van c_2 is $|MB| = \frac{1}{2}|BC| = 6$
 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ met $a = 8, b = 5, r = 6$ geeft $(x - 8)^2 + (y - 5)^2 = 36$

2a *Alternatief*

De straal van c_2 is $r = \frac{1}{2}|BC| = 6$

Invullen van de coördinaten van B en C in de vergelijking $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 36$ geeft een stelsel van twee vergelijkingen met oplossing $a = 8$ en $b = 5$.

2b



De vergelijking van c_1 kan worden geschreven als $x^2 + (y + 1)^2 = 16$

c_1 is dus de cirkel met middelpunt $N(0, -1)$ en straal $r_1 = 4$

c_2 is de cirkel met middelpunt $M(8,5)$ en straal $r_2 = 6$

$$|MN| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 = 4 + 6 = r_1 + r_2$$

De cirkels raken elkaar dus in punt S

2b *Alternatief 1*

Stel een vectorvoorstelling of een vergelijking op voor de lijn door M en N .

Bereken de snijpunten met c_1 .

Laat zien dat het snijpunt $S(3,2, 1,4)$ ook op c_2 ligt.

2b *Alternatief 2*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y - 15 = 0 \\ (x - 8)^2 + (y - 5)^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2y - 15 = 0 \\ x^2 - 16x + 64 + y^2 - 10y + 25 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y - 15 = 0 \\ x^2 - 16x + y^2 - 10y + 53 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2y - 15 = 0 \\ 16x + 12y - 68 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2y - 15 = 0 \\ x = -\frac{3}{4}y + \frac{17}{4} \end{cases}$$

Substitutie van de tweede vergelijking in de eerste geeft:

$$\frac{9}{16}y^2 - \frac{102}{16}y + \frac{289}{16} + y^2 + 2y - 15 = 0 \Leftrightarrow \frac{25}{16}y^2 - \frac{70}{16}y + \frac{49}{16} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{7}{5},$$

dus $S(3,2, 1,4)$ is het enige gemeenschappelijke punt van c_1 en c_2 .

2c De vergelijking van c_1 kan worden geschreven als $x^2 + (y + 1)^2 = 16$
 c_1 is dus de cirkel met middelpunt $N(0, -1)$ en straal 4
 De afstand tussen de raaklijnen uit punt A en middelpunt $N(0, -1)$ is zodoende 4.
 Deze raaklijnen hebben een vergelijking van de vorm $y = ax + 5 \Leftrightarrow ax - y = -5$
 De afstand tussen een punt (x_0, y_0) en een lijn met vergelijking $ax + by = c$ wordt
 gegeven door $\frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Dit moet gelijk zijn aan 4.
 Invullen van $b = -1$, $c = -5$, $x_0 = 0$ en $y_0 = -1$ geeft dan
 $\frac{|0 + (-1) \cdot (-1) + 5|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a^2 + 1 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow a^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow a = \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$
 De raaklijnen zijn $y = \frac{1}{2}\sqrt{5} \cdot x + 5$ en $y = -\frac{1}{2}\sqrt{5} \cdot x + 5$

2c *Alternatief 1*

Een rechte lijn door $A(0,5)$ heeft vergelijking $y = ax + 5$. Dit is een raaklijn aan c_1 als
 het stelsel $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y - 15 = 0 \\ y = ax + 5 \end{cases}$ precies één oplossing heeft.

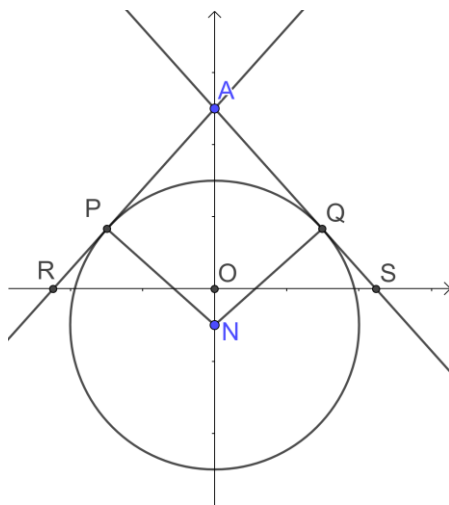
$$x^2 + (ax + 5)^2 + 2(ax + 5) - 15 = 0 \Leftrightarrow (1 + a^2)x^2 + 12ax + 20 = 0$$

$$D = (12a)^2 - 4 \cdot (1 + a^2) \cdot 20 = 64a^2 - 80$$

$$D = 0 \Leftrightarrow a^2 = \frac{80}{64} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow a = \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

De raaklijnen zijn $y = \frac{1}{2}\sqrt{5} \cdot x + 5$ en $y = -\frac{1}{2}\sqrt{5} \cdot x + 5$

2c *Alternatief 2*



$$\angle NPA = 90^\circ, |AN| = 6, |PN| = 4 \Rightarrow |AP| = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{20}$$

$$\tan(\angle PAN) = \frac{4}{\sqrt{20}}; \tan(\angle ORA) = \frac{1}{\tan(\angle PAN)} = \frac{\sqrt{20}}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

Dus de vergelijking van de lijn door A en P is $y = \frac{1}{2}\sqrt{5} \cdot x + 5$

De vergelijking van de lijn door A en Q is $y = -\frac{1}{2}\sqrt{5} \cdot x + 5$

3a f heeft een verticale asymptoot als de noemer 0 is en de teller niet.

$$(2x + 1)(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow 2x = -1 \vee x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = \pm 2$$

$$3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

$$\text{Verticale asymptoten: } x = -\frac{1}{2}, x = -2$$

$$f(x) = \frac{3x^2 - 6x}{2x^3 + x^2 - 8x - 4} = \frac{\frac{3}{x} - \frac{6}{x^2}}{2 + \frac{1}{x} - \frac{8}{x^2} - \frac{4}{x^3}} \rightarrow \frac{0 - 0}{2 + 0 - 0 - 0} = 0 \quad (x \rightarrow \pm\infty)$$

$$\text{Horizontale asymptoot: } x = 0$$

3b Voor $x \neq 2$ geldt:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 6x}{(2x + 1)(x^2 - 4)} = \frac{3x(x - 2)}{(2x + 1)(x + 2)(x - 2)} = \frac{3x}{(2x + 1)(x + 2)}$$

$$g(x) = \frac{2(2x + 1)}{(x + 2)(2x + 1)} - \frac{x + 2}{(2x + 1)(x + 2)} = \frac{2(2x + 1) - (x + 2)}{(x + 2)(2x + 1)} = \frac{4x + 2 - x - 2}{(x + 2)(2x + 1)}$$

3c
$$g'(x) = -\frac{2}{(x + 2)^2} + \frac{2}{(2x + 1)^2}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = (2x + 1)^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 4x^2 + 4x + 1$$

$$\Leftrightarrow -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$\text{Maximum op interval } 0 \leq x \leq 3: g(1) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$h'(x) = \frac{1}{3}e^{1-x} - \frac{1}{3}xe^{1-x}; h'(x) = 0 \Leftrightarrow (1 - x)e^{1-x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{Maximum op interval } 0 \leq x \leq 3: h(1) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot e^0 = \frac{1}{3}$$

3d
$$\int_0^2 g(x) dx = \left[2 \ln(x + 2) - \frac{1}{2} \ln(2x + 1) \right]_0^2 = 2 \ln(4) - \frac{1}{2} \ln(5) - 2 \ln(2) + \frac{1}{2} \ln(1)$$

$$= 2 \ln(4) - \ln(2^2) - \frac{1}{2} \ln(5) + \frac{1}{2} \cdot 0 = \ln(4) - \ln(\sqrt{5}) = \ln\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\text{Andere vereenvoudigingen mogelijk, zoals } \frac{1}{2} \ln\left(\frac{16}{5}\right) = \ln(\sqrt{3,2})$$

4a $g'_p(x) = -2pe^{px} \Rightarrow g'_p(0) = -2p$; $h'(x) = 2e^x \Rightarrow h'(0) = 2$
 $g'_p(0) \cdot h'(0) = -1 \Leftrightarrow -2p \cdot 2 = -1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{4}$

4b $g_p(\ln(2)) = 4 - 2e^{p \ln(2)} = 4 - 2(e^{\ln(2)})^p = 4 - 2 \cdot 2^p$
 $g_1(\ln(2)) = 4 - 2 \cdot e^{\ln(2)} = 4 - 2 \cdot 2 = 0$
 $g_p(\ln(2)) - g_1(\ln(2)) = 8 \Leftrightarrow 4 - 2 \cdot 2^p - 0 = 8 \Leftrightarrow 2^p = -2$
Dit heeft geen oplossing.

$g_1(\ln(2)) - g_p(\ln(2)) = 8 \Leftrightarrow 0 - 4 + 2 \cdot 2^p = 8 \Leftrightarrow 2^p = 6 \Leftrightarrow p = {}^2\log(6)$

4c Voor $x > 0$ geldt $g_1(x) > g_2(x)$, dus te berekenen:

$$\int_0^q g_1(x) - g_2(x) dx = \int_0^q 4 - 2e^x - (4 - 2e^{2x}) dx = \int_0^q 2e^{2x} - 2e^x dx$$

$$= [e^{2x} - 2e^x]_0^q = e^{2q} - 2e^q - 1 + 2$$

4d $e^{2q} - 2e^q + 1 = 4 \Leftrightarrow (e^q)^2 - 2e^q - 3 = 0 \Leftrightarrow (e^q + 1)(e^q - 3) = 0 \Leftrightarrow e^q = -1 \vee e^q = 3$
 $e^q = -1$ heeft geen oplossing; $e^q = 3 \Leftrightarrow q = \ln(3)$

5a $f(x) = -1 \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right)$
Dit geeft $2x - \frac{1}{3}\pi = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow 2x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi$
of $2x - \frac{1}{3}\pi = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow 2x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$
Oplossingen met $0 \leq x \leq 2\pi$: $\frac{1}{12}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$, $1\frac{1}{12}\pi$ en $1\frac{3}{4}\pi$

5b $f'(x) = 4 \cos\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) \Rightarrow f'\left(\frac{1}{6}\pi\right) = 4 \cos(0) = 4$
Raaklijn $y = 4\left(x - \frac{1}{6}\pi\right) \Leftrightarrow y = 4x - \frac{2}{3}\pi$, dus B is het punt $\left(0, -\frac{2}{3}\pi\right)$
Oppervlakte $\Delta OAB = \frac{1}{2} \cdot |OA| \cdot |OB| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}\pi \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{1}{18}\pi^2$

5c $L(q) = g(q) - f(q) = 4 - 2 \sin(2q) - 2 \sin\left(2q - \frac{1}{3}\pi\right)$
 $L'(q) = -4 \cos(2q) - 4 \cos\left(2q - \frac{1}{3}\pi\right)$
 $L'(q) = 0 \Leftrightarrow \cos(2q) = -\cos\left(2q - \frac{1}{3}\pi\right) \Leftrightarrow \cos(2q) = \cos\left(2q - \frac{1}{3}\pi + \pi\right)$
Dit geeft als enige mogelijkheid:
 $2q = -\left(2q + \frac{2}{3}\pi\right) + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow 4q = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow q = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$
 $L\left(-\frac{1}{6}\pi\right) = 4 - 2 \sin\left(-\frac{1}{3}\pi\right) - 2 \sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = 4 + \sqrt{3} + \sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3}$;
 $L\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 4 - 2 \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) - 2 \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 4 - \sqrt{3} - \sqrt{3} = 4 - 2\sqrt{3}$
De minimale afstand is zodoende $4 - 2\sqrt{3}$