Uitwerkingen CCVW Wiskunde A 17-4-2021

Vraag 1a - 5 punten

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 + 4x^2 - 8x + 4 = 4x^2 + 8x + 4 \Leftrightarrow x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 16) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ \ x = 4$ en $x = -4$

De snijpunten zijn $(0{,}4)$, $(4{,}100)$ en $(-4{,}36)$.

Vraag 1b - 5 punten

$f'(x) = -5 \Leftrightarrow 3x^2 + 8x - 8 = -5 \Leftrightarrow 3x^2 + 8x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3}$

Dit geeft $x = \frac{-8+10}{6} = \frac{1}{3}$ of $x = \frac{-8-10}{6} = -3$

Vraag 1c - 6 punten

$h'(x) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{8x}{2\sqrt{4x^2+3}} = 1 \Leftrightarrow 8x = 2\sqrt{4x^2 + 3} \Leftrightarrow 4x = \sqrt{4x^2 + 3}$

Dit geeft $16x^2 = 4x^2 + 3 \Leftrightarrow 12x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$

$x = -\frac{1}{2}$ voldoet niet, dus enige oplossing $x = \frac{1}{2}$

Vraag 1d - 4 punten

$k'(x) = 1 \cdot \mathrm{e}^{-2x+2} + x \cdot \mathrm{e}^{-2x+2} \cdot (-2) = (1 - 2x)\mathrm{e}^{-2x+2}$

$k'(1) = (1 - 2) \cdot \mathrm{e}^{-2+2} = -1 \cdot \mathrm{e}^0 = -1 \cdot 1 = -1$

Vraag 2a - 4 punten

$$P = R - C = 2q - \frac{q^2 + 8q + 4}{q + 4} = 2q \cdot \frac{q + 4}{q + 4} - \frac{q^2 + 8q + 4}{q + 4} = \frac{2q^2 + 8q}{q + 4} - \frac{q^2 + 8q + 4}{q + 4}$$

$$= \frac{2q^2 + 8q - (q^2 + 8q + 4)}{q + 4} = \frac{2q^2 + 8q - q^2 - 8q - 4}{q + 4} = \frac{q^2 - 4}{q + 4}$$

Vraag 2b - 4 punten

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}q} = \frac{2q \cdot (q + 4) - (q^2 - 4) \cdot 1}{(q + 4)^2} = \frac{2q^2 + 8q - q^2 + 4}{q^2 + 2 \cdot q \cdot 4 + 4^2} = \frac{q^2 + 8q + 4}{q^2 + 8q + 16}$$

Vraag 2c - 3 punten

De functie bestaat voor $q > 0$.

Voor $q > 0$ zijn alle termen van de teller en de noemer van $\mathrm{d}P/\mathrm{d}q$ positief.

Hieruit volgt $\mathrm{d}P/\mathrm{d}q > 0$, dus is P een stijgende functie.

Vraag 3a - 5 punten

Het aantal genezen patiënten is een binomiaal verdeelde toevalsvariabele X met $n = 10$ en $p = 0{,}2$

$P(X \geq 2) = 1 - \big(P(X = 0) + P(X = 1)\big) = 1 - (0{,}8^{10} + 10 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^9) \approx 0{,}6242$

Vraag 3b - 1 punt

$H_0\!: \ p = 0{,}5; \ \ H_1\!: \ p < 0{,}5$

Vraag 3c - 4 punten

Als Pillfit gelijk heeft, zijn zowel het aantal genezen (X) als het aantal niet genezen patiënten (Y) binomiaal verdeeld met $n = 16$ en $p = 0{,}5$

$P(X = 4) = \binom{16}{4} \cdot 0{,}5^4 \cdot 0{,}5^{12} = 1820 \cdot 0{,}5^{16} \approx 0{,}0278$

$P(Y = 12) = \binom{16}{12} \cdot 0{,}5^{12} \cdot 0{,}5^4 = 1820 \cdot 0{,}5^{16} \approx 0{,}0278$

Vraag 3d - 2 punten

Om een conclusie te kunnen trekken moet je ook de onbetrouwbaarheidsdrempel weten en moet je de overschrijdingskans ($P(X \leq 4)$ dan wel $P(Y \geq 12)$) weten.
Eén van beide redenen volstaat!

Vraag 4a - 3 punten

$495 = 500 - 5 = \mu - \frac{1}{2}\sigma; \ \ 520 = 500 + 20 = \mu + 2\sigma$

Hierbij horen de getallen $0{,}191 + 0{,}191 + 0{,}150 + 0{,}136$, dus het antwoord is $66{,}8\%$

Vraag 4b - 5 punten

$\mu = 50 \times 500 \text{ mg} + 10 \text{ g} = 25\,000 \text{ mg} + 10\,000 \text{ mg} = 35\,000 \text{ mg}$
of $\mu = 50 \times 0{,}5 \text{ g} + 10 \text{ g} = 25 \text{ g} + 10 \text{ g} = 35 \text{ g}$

$\sigma^2 = 50 \times 10^2 + 500^2$ (in milligram)
of $\sigma^2 = 50 \times 0{,}01^2 + 0{,}5^2$ (in gram)

Dit geeft $\sigma = \sqrt{5000 + 250\,000} = \sqrt{255\,000} \approx 505 \text{ mg}$
of $\sigma = \sqrt{0{,}005 + 0{,}25} = \sqrt{0{,}255} \approx 0{,}505 \text{ g}$

Vraag 4c - 4 punten

$P(3\,rood) = \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} \ \left(= \binom{3}{3} / \binom{9}{3}\right); \quad P(3\,blauw) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \ \left(= \binom{4}{3} / \binom{9}{3}\right)$

$P(3\,gelijke\ kleur) = P(3\,rood) + P(3\,blauw) = \frac{1}{84} + \frac{4}{84} = \frac{5}{84} \ (\approx 0{,}0595)$

Vraag 5a - 5 punten

Met twee dagen als tijdseenheid:
De groeifactor over twee dagen is $1{,}44$, dus verdubbeling geeft $1{,}44^t = 2$
Dit geeft $t = {}^{1,44}\log(2) \approx 1{,}90$, dat is $1{,}90 \times 2 = 3{,}80$ dagen

Met één dag als tijdseenheid:
De groeifactor over één dag is $\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$, dus verdubbeling geeft $1{,}2^t = 2$
Dit geeft $t = {}^{1,2}\log(2) \approx 3{,}80$ dagen

Vraag 5b - 5 punten

$4/(1 + 2e^{0,1t}) = 1 \Leftrightarrow 1 + 2e^{0,1t} = 4 \Leftrightarrow 2e^{0,1t} = 3 \Leftrightarrow e^{0,1t} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 0{,}1t = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

Dus $t = 10 \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right) \approx 4{,}0547$ maanden = 122 dagen

Vraag 6a - 2 punten

De sinus is minimaal -1 en maximaal 1
Dit geeft minimum $13{,}5 - 4{,}0 = 9{,}5$ en maximum $13{,}5 + 4{,}0 = 17.5$
Kan ook met evenwichtsstand = 13,5 en amplitude = 4,0.

Vraag 6b - 5 punten

$\frac{1}{3}\pi = \frac{2\pi}{periode} \Rightarrow periode = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}\pi} = 6$

Het tweede tijdstip na $t = 1$ is dus $t = 1 + 6 = 7$

De kogel begint op zijn laagste punt en is dus op $t = 6$ weer op zijn laagste punt
Dit betekent dat de kogel op $t = 6 - 1 = 5$ weer op $15{,}5$ m is

Het derde tijdstip is $5 + 6 = 12 - 1 = 11$

Zie ook onderstaande grafiek.