Uitwerkingen CCVW Wiskunde B 17-7-2021

Vraag 1a - 5 punten

$f(x) = h \Leftrightarrow \frac{4}{x^2} - 1 = h \Leftrightarrow \frac{4}{x^2} = h + 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{h+1}$

Dit geeft $x_P = -\sqrt{\frac{4}{h+1}}$ en $x_Q = \sqrt{\frac{4}{h+1}}$

Hieruit volgt $L = 2 \cdot \sqrt{\frac{4}{h+1}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{h+1}} = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{h+1}} = \frac{4}{\sqrt{h+1}}$

De hoogte van driehoek *PQT* is $h - \left(-1\frac{1}{2}\right) = h + 1\frac{1}{2}$

De oppervlakte van driehoek *PQT* is dus $\frac{1}{2}LH = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{h+1}} \cdot \left(h + 1\frac{1}{2}\right) = \frac{2\left(h+1\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{h+1}} = \frac{2h+3}{\sqrt{h+1}}$

Vraag 1b - 5 punten

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}h} = \frac{2 \cdot \sqrt{h+1} - (2h+3) \cdot \frac{1}{2\sqrt{h+1}}}{h+1}$$

$\mathrm{d}A/\mathrm{d}h = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{h+1} = (2h+3) \cdot \frac{1}{2\sqrt{h+1}} \Leftrightarrow 4(h+1) = 2h+3$

$\Leftrightarrow 4h + 4 = 2h + 3 \Leftrightarrow 2h = -1 \Leftrightarrow h = -\frac{1}{2}$

Vraag 1c - 4 punten

$f(4) = \frac{4}{16} - 1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$, dus *S* is het punt $\left(4, -\frac{3}{4}\right)$

De lijn door *R* en *S* heeft richtingscoëfficiënt $\frac{-3/4-0}{4-(-2)} = \frac{-3/4}{6} = -\frac{1}{8}$

$f'(x) = -\frac{8}{x^3} \Rightarrow f'(4) = -\frac{8}{64} = -\frac{1}{8}$

De lijn door *R* en *S* raakt dus de grafiek van f in punt *S*.

Alternatief:

De raaklijn is de lijn door $S\left(4, -\frac{3}{4}\right)$ met richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{8}$ (zie hierboven).

De vergelijking van deze raaklijn is $y = -\frac{1}{8}x - \frac{1}{4}$

$x = -2$ geeft $y = 0$, dus deze lijn gaat ook door $R(-2{,}0)$.

Vraag 1d - 5 punten

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$,

de inhoud van *V* wordt dus gegeven door $\pi \cdot \int_2^4 (f(x))^2 \, \mathrm{d}x$

$$\int_2^4 \left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x = \int_2^4 \left(\frac{4}{x^2} - 1\right)^2 \mathrm{d}x = \int_2^4 \frac{16}{x^4} - \frac{8}{x^2} + 1 \, \mathrm{d}x = \left[-\frac{16}{3}x^{-3} + 8x^{-1} + x\right]_2^4$$

$$= -\frac{1}{12} + 2 + 4 - \left(-\frac{2}{3} + 4 + 2\right) = \frac{7}{12}$$

Vraag 1e - 5 punten

Het omwentelingslichaam van lijnstuk *RS* noemen we *K*.

De inhoud van het omwentelingslichaam van *W* is de inhoud van *K* min de inhoud van het omwentelingslichaam van *V*.

K is een kegel met hoogte $h = x_S - x_R = 4 - (-2) = 6$.

De straal van de grondcirkel is $r = |y_S| = |f(4)| = \frac{3}{4}$

De inhoud van *K* is gelijk aan $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{9}{16} \cdot 6 = \frac{9}{8}\pi$

De inhoud van het omwentelingslichaam van *W* is dus $\frac{9}{8}\pi - \frac{7}{12}\pi = \frac{27}{24}\pi - \frac{14}{23}\pi = \frac{13}{24}\pi$

De vergelijking van m is $y = -\frac{1}{8}x - \frac{1}{4}$, dus de inhoud van K kan ook berekend worden met

$$\pi \cdot \int_{-2}^4 \left(-\frac{1}{8}x - \frac{1}{4}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \cdot \int_{-2}^4 \frac{1}{64}x^2 + \frac{1}{16}x + \frac{1}{16} \, \mathrm{d}x = \pi \cdot \left[\frac{1}{192}x^3 + \frac{1}{32}x^2 + \frac{1}{16}x\right]_{-2}^4$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\right)\right) = \pi \cdot \left(\frac{8}{24} + \frac{12}{24} + \frac{6}{24} + \frac{1}{24}\right) = \pi \cdot \frac{27}{24} = \frac{9}{8}\pi$$

Vraag 2a - 5 punten

$x^2 - 4x + 3 = 3 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$, dus $A = (0,3)$, $B = (4,3)$.

T ligt op de symmetrieas van de parabool, dat is de middelloodlijn van AB.

T is ook het punt op de parabool waar de helling 0 is, dus $2x_T = 4 = 0$.

Op elk van de drie manieren volgt $x_T = 2$, dus $y_T = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$.

We zoeken dus de vergelijking van de cirkel door de punten $A(0,3)$, $B(4,3)$ en $T(2,-1)$.

Deze heeft een vergelijking van de vorm $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Er zijn (ten minste) 3 manieren om a en b te vinden:

1. Substitueer de coördinaten van A, B en T in $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

Dit geeft $\begin{cases} ① & (0-a)^2 + \quad (3-b)^2 = r^2 \\ ② & (4-a)^2 + \quad (3-b)^2 = r^2 \\ ③ & (2-a)^2 + (-1-b)^2 = r^2 \end{cases}$

① − ② geeft $a^2 - (4-a)^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 - 16 + 8a - a^2 = 0 \Leftrightarrow 8a - 16 = 0 \Leftrightarrow a = 2$

② geeft dan $4 + (3-b)^2 = r^2$, ③ geeft dan $(-1-b)^2 = r^2$

Dit combineert tot $4 + (3-b)^2 = (-1-b)^2 \Leftrightarrow 4 + 9 - 6b + b^2 = 1 + 2b + b^2 \Leftrightarrow 8b = 12 \Leftrightarrow b = 1\frac{1}{2}$

2. Bereken het snijpunt M van de middelloodlijnen van AB en AT *(of BT)*.
Dit snijpunt ligt op gelijke afstand van A, B en T en is dus het middelpunt van de cirkel.

De middelloodlijn van AB is $x = 2$ (de symmetrieas van de parabool!), dus $a = x_M = 2$.

Het midden van AT is $(1,1)$. De richtingscoëfficiënt van AT is $\frac{-1-3}{2-0} = -2$.

De middelloodlijn van AT heeft dus de vergelijking $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Substitueren van $x_M = 2$ geeft $b = y_M = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$.

Het midden van BT is $(3,1)$ en de richtingscoëfficiënt is 2,
de vergelijking van de middelloodlijn van BT is dus $y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$.

3. Gebruik dat voor het middelpunt M geldt $|AM| = |TM|$ *($= |BM|$)*

M ligt op gelijke afstand van A en B, dus op de middelloodlijn van AB (de symmetrieas van de parabool!). Dit geeft $a = x_M = 2$. M ligt ook op gelijke afstand van A en T, dus $|AM| = |TM|$.

$|AM|^2 = (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 = (2-0)^2 + (b-3)^2 = 4 + b^2 - 6b + 9 = b^2 - 6b + 13$

$|TM|^2 = (x_M - x_T)^2 + (y_M - y_T)^2 = (2-2)^2 + (b-(-1))^2 = 0 + b^2 + 2b + 1 = b^2 + 2b + 1$

$|AM|^2 = |TM|^2$ geeft dan $-6b + 13 = 2b + 1 \Leftrightarrow 8b = 12 \Leftrightarrow b = 1\frac{1}{2}$.

$|BM|$ is ook gelijk aan $b^2 - 6b + 13$.

Bij alle drie manieren krijgen we een vergelijking van de vorm $(x-2)^2 + \left(y - 1\frac{1}{2}\right)^2 = r^2$.

$r = y_M - y_T = 1\frac{1}{2} - (-1) = 2\frac{1}{2}$ geeft $r^2 = 6\frac{1}{4}$, dus het antwoord is: $(x-2)^2 + \left(y - 1\frac{1}{2}\right)^2 = 6\frac{1}{4}$.

Je kunt r^2 ook berekenen door de coördinaten van A of B of T te substitueren in de vergelijking.

Vraag 2b - 4 punten

De cirkel raakt de grafiek van f in punt A, ze hebben daar dus dezelfde raaklijn.

De lijn door het middelpunt van de cirkel M en het raakpunt A staat loodrecht op deze raaklijn.

$f(x) = x^2 - 4x + 3$ geeft $f'(x) = 2x - 4$, dus $f'(0) = -4$.

Als twee lijnen loodrecht op elkaar staan, is het product van hun richtingscoëfficiënten gelijk aan -1.

De richtingscoëfficiënt van de lijn door M en A is dus $\frac{1}{4}$ en de vergelijking is $y = \frac{1}{4}x + 3$.

$y_M = 0$ geeft $\frac{1}{4}x = -3 \Leftrightarrow x = -12$, dus $x_M = -12$.

De berekening in de laatste drie regels kan ook met vectoren:

De richtingsvector van de raaklijn is $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} x_A - x_M \\ y_A - y_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - x_M \\ 3 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_M \\ 3 \end{pmatrix}$

Deze vectoren moeten loodrecht op elkaar staan, dus hun inproduct moet 0 zijn.

Dit geeft $1 \cdot (-x_M) + (-4) \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow -x_M - 12 = 0 \Leftrightarrow x_M = -12$.

En zelfs met de afstandsformule:

Een cirkel met middelpunt $M(x_M, 0)$ heeft een vergelijking van de vorm $(x - x_M)^2 + y^2 = r^2$.

Omdat $A(0,3)$ op de cirkel ligt, geeft dit $x_M^2 + 3^2 = r^2$

r is de afstand tussen M en de raaklijn in A, dat is de lijn k: $y = -4x + 3 \Leftrightarrow 4x + y = 3$.

De afstandsformule $d(M.k) = \frac{|ax_M + by_M - c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|4 \cdot x_M + 1 \cdot 0 - 3|}{\sqrt{4^2+1^2}} = \frac{|4x_M - 3|}{\sqrt{17}}$ geeft $r^2 = \frac{(4x_M - 3)^2}{17}$

Samen met $x_M^2 + 3^2 = r^2$ volgt dan

$x_M^2 + 9 = \frac{(4x_M - 3)^2}{17} \Leftrightarrow 17x_M^2 + 153 = 16x_M^2 - 24x_M + 9 \Leftrightarrow x_M^2 + 24x_M + 144 = 0 \Leftrightarrow x_M = -12$

Vraag 2c - 7 punten

Direct met de vectorvoorstelling van m:

De zijde *AB* is horizontaal, dus driehoek *ABC* heeft een rechte hoek bij *A* als *C* recht boven of onder $A(0{,}3)$ ligt, dat is als $x_C = 0$.

In de vectorvoorstelling zien we direct dat punt $C(0{,}1)$ op lijn *m* ligt, dus dit is de eerste mogelijkheid.

Driehoek *ABC* heeft een rechte hoek bij *B* als *C* recht boven of onder *B* ligt, dus als $x_C = 4$.

Invullen van $x = 4$ in $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ geeft $2\lambda = 4 \Leftrightarrow \lambda = 2$, dus $y = 1 + 2 \cdot 1 = 3$, dus het punt op lijn *m* met $x = 4$ is punt *B*. De rechte hoek kan zodoende niet bij *B* liggen.

Driehoek *ABC* heeft een rechte hoek bij *C* als de vector $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2\lambda - 0 \\ (1+\lambda) - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ \lambda - 2 \end{pmatrix}$ loodrecht staat op de richtingsvector van *BC*. Omdat *B* en *C* op *m* liggen, is dat de richtingsvector van *m*.

Het inproduct van deze vectoren is dan 0.

Dit geeft $2\lambda \cdot 2 + (\lambda - 2) \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow 5\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{5}$, dus $C = \left(\frac{4}{5}, 1\frac{2}{5}\right)$ is de tweede mogelijkheid.

Met de vergelijking van m:

Lijn *m* gaat door $(0{,}1)$ en heeft richtingscoëfficiënt $\frac{1}{2}$, dus de vergelijking is $y = \frac{1}{2}x + 1$.

De zijde *AB* is horizontaal, dus driehoek *ABC* heeft een rechte hoek bij *A* als *C* recht boven of onder $A(0{,}3)$ ligt, dat is als $x_C = 0$. Dit geeft $y_C = 1$, dus $C(0{,}1)$ is de eerste mogelijkheid.

Driehoek *ABC* heeft een rechte hoek bij *B* als *C* recht boven of onder *B* ligt, dus als $x_C = 4$.

Invullen van $x = 4$ in $y = \frac{1}{2}x + 1$ geeft $y = \frac{1}{2} \cdot 4 + 1 = 3$, dus het punt op lijn *m* met $x = 4$ is punt *B*.

De rechte hoek kan zodoende niet bij *B* liggen.

De rechte hoek ligt bij *C* als *AC* loodrecht staat op *BC*, dat is als het product van de richtingscoëfficiënten gelijk is aan -1.

De richtingscoëfficiënt van *AC* is $\dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \dfrac{\frac{1}{2}x_C + 1 - 3}{x_C - 0} = \dfrac{\frac{1}{2}x_C - 2}{x_C}$

Omdat *B* en *C* beide op *m* liggen, is richtingscoëfficiënt van *BC* gelijk aan $\frac{1}{2}$.

Dit geeft $\left(\frac{1}{2}x_C - 2\right)/x_C \cdot \frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x_C - 2\right) \cdot \frac{1}{2} = -x_C \Leftrightarrow \frac{1}{4}x_C - 1 = -x_C \Leftrightarrow \frac{5}{4}x_C = 1 \Leftrightarrow x_C = \frac{4}{5}$

Hieruit volgt $y_C = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} + 1 = 1\frac{2}{5}$, dus $C = \left(\frac{4}{5}, 1\frac{2}{5}\right)$ is de tweede mogelijkheid.

Voor het geval dat de rechte hoek bij C ligt, kunnen we ook de stelling van Thales toepassen. C ligt dan zowel op lijn m als op de cirkel met middellijn AB.

Het midden van *AB* is $(2{,}3)$, de vergelijking voor de cirkel met middellijn *AB* is dus $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$.
Als we de vergelijking van *m* substitueren in de vergelijking van de cirkel, krijgen we
$(x-2)^2 + \left(\frac{1}{2}x - 2\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{5}{4}x^2 - 6x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ of $x = \frac{4}{5}$,
waarbij alleen $x = \frac{4}{5}$ (dus $y = 1\frac{2}{5}$) een rechthoekige driehoek geeft.

Vraag 3a - 3 punten

In een perforatie zijn de teller en de noemer van de breuk beide 0.

De teller is dan 0 als $2\ln(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\ln(x) = 1 \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

De noemer is 0 als $x = k$.

Dit geeft $k = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ $\left(= \sqrt{\mathrm{e}}\right)$.

Vraag 3b - 2 punten

$$F'(x) = 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = (2\ln(x) - 1) \cdot \frac{1}{x} = f_0(x)$$

Vraag 3c - 6 punten

$f_0(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}}$, De oppervlakte van V_a wordt dus gegeven door $\int_{\sqrt{\mathrm{e}}}^{a} f_0(x)\,\mathrm{d}x$

Dit geldt ook als $a < \sqrt{\mathrm{e}}$, want zowel een oppervlak onder de x-as als het omdraaien van de grenzen geeft een minteken.

$$\int_{\sqrt{\mathrm{e}}}^{a} f_0(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) = \ln^2(a) - \ln(a) - \left(\ln^2\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) - \ln\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)\right) = \ln^2(a) - \ln(a) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \ln^2(a) - \ln(a) + \frac{1}{4}$$

$\ln^2(a) - \ln(a) + \frac{1}{4} = 4 \Leftrightarrow \ln^2(a) - \ln(a) - \frac{15}{4} = 0$ geeft $\ln(a) = \frac{1 \pm \sqrt{1+15}}{2} = \frac{1 \pm 4}{2}$

$\ln(a) = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$ geeft $a = \mathrm{e}^{\frac{5}{2}}$; $\ln(a) = \frac{1-4}{2} = -\frac{3}{2}$ geeft $a = \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$

Vraag 3d - 3 punten

$$h(x) = x \cdot \frac{2\ln(x) - 1}{x} - \left(3 - \ln\left(\frac{2}{x}\right)\right) = 2\ln(x) - 1 - 3 + \ln\left(\frac{2}{x}\right)$$

$$= \ln(x^2) + \ln\left(\frac{2}{x}\right) - 4 = \ln\left(x^2 \cdot \frac{2}{x}\right) - 4 = \ln(2x) - 4 = \ln(2x) - \ln(\mathrm{e}^4) = \ln\left(\frac{2x}{\mathrm{e}^4}\right)$$

Dus $b = \frac{2}{\mathrm{e}^4}$

Vraag 4a - 4 punten

$x = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\cos(\mathrm{t}) = 0 \vee \cos(t) = 0 \Leftrightarrow \cos(t) = -\frac{1}{2} \vee \cos(t) = 0$

$y = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\cos(\mathrm{t}) = 0 \vee \sin(t) = 0 \Leftrightarrow \cos(t) = -\frac{1}{2} \vee \sin(t) = 0$

$x = 0$ en $y = 0$ geeft dus $\cos(t) = -\frac{1}{2}$

Dit geeft $t = \frac{2}{3}\pi$ of $t = \frac{4}{3}\pi$

Vraag 4b - 6 punten

Met de productregel krijgen we

$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -2\sin(t) \cdot \cos(t) + (1 + 2\cos(t)) \cdot (-\sin(t))$

$\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = -2\sin(t) \cdot \sin(t) + (1 + 2\cos(t)) \cdot \cos(t)$

Eerst haakjes wegwerken geeft

$x(t) = \cos(t) + 2\cos^2(t)$, dus $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -\sin(t) - 4\sin(t)\cos(t)$

$y(t) = \sin(t) + 2\sin(t)\cos(t) = \sin(t) + \sin(2t)$,

dus $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = \cos(t) + 2\cos^2(t) - 2\sin^2(t)$ of $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = \cos(t) + 2\cos(2t)$

Dit geeft voor $t = \frac{1}{2}\pi$:

$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -2 \cdot 1 \cdot 0 + (1 + 2 \cdot 0) \cdot (-1) = -1$ of $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -1 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = -1$

$\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = -2 \cdot 1 \cdot 1 + (1 + 2 \cdot 0) \cdot 0 = -2$ of $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = 0 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -2$ of $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = 0 + 2 \cdot (-1) = -2$

Hieruit volgt $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -2/-1 = 2$

De hellingshoek van de raaklijn aan de kromme is dan $\tan^{-1}(2) \approx 63°$

De hoek van de kromme met de *y*-as is zodoende $90° - 63° = 27°$

De laatste twee regels kunnen ook met de cosinus van de hoek tussen de richtingsvectoren:

$$\cos(\alpha) = \frac{\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)}{\left|\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{0+2}{\sqrt{5} \cdot 1} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \approx 27°$$

Vraag 4c - 8 punten

In het hoogste en het laagste punt geldt $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = 0$

Met de productregel krijgen we

$\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = -\sin(t)\cdot\sin(t) + (1+\cos(t))\cdot\cos(t) = -\sin^2(t) + \cos^2(t) + \cos(t)$

Eerst haakjes wegwerken geeft

$y(t) = \sin(t) + \cos(t)\sin(t)$, dus $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = \cos(t) + \cos^2(t) - \sin^2(t)$

We kunnen ook werken met $y(t) = sin(t) + cos(t)\,sin(t) = sin(t) + \frac{1}{2}sin(2t)$.

Dit geeft net als in de eerste variant hieronder $dy/dt = cos(t) + cos\,(2t)$.

Met de omzetting $\cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos(2t)$ volgt:

$\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = 0 \Leftrightarrow \cos(t) + \cos(2t) = 0 \Leftrightarrow \cos(t) = -\cos(2t)$

Dit geeft

$\cos(t) = \cos(2t-\pi) \Leftrightarrow t = 2t - \pi + k\cdot 2\pi \vee t = \pi - 2t + k\cdot 2\pi$

$\Leftrightarrow -t = -\pi + k\cdot 2\pi \vee 3t = \pi + k\cdot 2\pi \Leftrightarrow t = \pi + k\cdot 2\pi \vee t = \frac{1}{3}\pi + k\cdot\frac{2}{3}\pi$

of $\cos(t) = \cos(2t+\pi) \Leftrightarrow t = 2t + \pi + k\cdot 2\pi \vee t = -\pi - 2t + k\cdot 2\pi$

$\Leftrightarrow -t = \pi + k\cdot 2\pi \vee 3t = -\pi + k\cdot 2\pi \Leftrightarrow t = -\pi + k\cdot 2\pi \vee t = -\frac{1}{3}\pi + k\cdot\frac{2}{3}\pi$

Met de omzetting $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t) \Leftrightarrow -\sin^2(t) = \cos^2(t) - 1$ volgt:

$$\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2(t) + \cos(t) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos(t) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2} = \frac{-1\pm 3}{4}$$

Dit geeft $\cos(t) = -1$ of $\cos(t) = \frac{1}{2}$

In alle varianten zijn de oplossingen met $0 \le t \le 2\pi$: $t = \frac{1}{3}\pi$, $t = \pi$ en $t = \frac{2}{3}\pi$.

$t = \pi$, geeft $x = 0$ en $y = 0$, dit is niet het hoogste of het laagste punt.

$t = \frac{1}{3}\pi$ geeft $x = \frac{3}{4}$ en $y = \frac{3}{4}\sqrt{3}$, dit is het hoogste punt.

$t = 1\frac{2}{3}\pi$ geeft $x = \frac{3}{4}$ en $y = -\frac{3}{4}\sqrt{3}$, dit is het laagste punt.

